Formule Matematice Pentru Admitere-profesor Iacob Marcu

SUBIECTUL I --- clasa IX - X

SUBIECTUL II --- Algebra-cl XI-XII

SUBIECTUL III --- Analiza-cl XI-XII

CONSTANTE

$\delta = 0,577 = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right)$ ---- Euler - Mascheronni

$e = 2,718 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ ---- Euler

$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618$ -- $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi$ -- proportia de aur (see Fibonacci series)

$e^{i\pi} + 1 = 0;$ ---- formula Euler

NUMERE REALE – SUME

- opusul lui -- a -- este (- a)

- inversul lui a -- -- este $\left(\frac{1}{a}\right)$

- dist intre punctele de int a G_f cu axa OX = $|x_1 - x_2|$

$\sqrt[m]{a}\ \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}};$

$a - b = \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{b}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a\,b} + \sqrt[3]{b^2}\right);$

Modul

$|a - b| = \begin{cases} a - b & a \ge b \\ b - a & a < b \end{cases}$

$|a| \le b$ ------ $a \in [-b, b]$

$|a| > b$ ------ $a \in (-\infty, -b) \cup (b, +\infty)$

Ecuatii cu partea intreaga

Exemplu ------------------

$\left[x + \frac{1}{2}\right] = \frac{5x - 1}{3};\ x = ?$

etapa 1 ------ notam membrul drept cu --k--calculam -- x

$\frac{5x-1}{3} = k$ --- rezulta $x = \frac{3k+1}{5}$

etapa 2 ------ exprimam membrul stang in fc de --k

$\left[x + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{6k+7}{10}\right]$

etapa 3 ------ ec initiala devine:

$\left[\frac{6k+7}{10}\right] = k$

$k \le \frac{6k+7}{10} < k+1 \,\Big|\, 10 \;...\, \Big|\, -10k$

$\frac{7}{4} \ge k > \frac{-3}{4}$ ---- $k = \{0, 1\}$;

$x = \left\{\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right\}$;

Partea Intreaga – Fractionara $x = [x] + \{x\}$;

$\left\{\frac{-1}{3}\right\} = \frac{2}{3}$;

$\{-0,333\} = \{0,667\}; [-0,333] = -1;$ ----deoarece $(-0,333 = -1 + 0,667)$;

Identitati

$2k + 1 = (k+1)^2 - k^2$;

Patratul unui nr intreg este de forma -- 4 p-- sau 4 p + 1;

Dem :

Fie k intreg par --- k = 2 l

$k^2 = (2l)^2$

$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2} b + a^{n-3} b^2 + ... + a b^{n-2} + b^{n-1}\right)$;

$S = x + 2x^2 + 3x^3 + ... + nx^n = \sum_{k=1}^{n} k x^k = \frac{n x^{n+2} - (n+1) x^{n+1} + x}{(x-1)^2}$;

Sa se afle nr de cifre al numarului 7^{2007} ?

Raspuns = $\lg 7^{2007} = 2007 \lg 7 = 1696$ cifre

Radicali suprapusi

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

$$\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \frac{\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{b}\right)^3}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a\,b} + \sqrt[3]{b^2}};$$

Clasele de resturi modulo n

$-16 \bmod 3 = 2$ ---- deoarece --- $3(-6) + 2 = -16$;

Descomp. fc rationale in fractii simple-met coef nedetermin

$$\frac{1}{(x+a)\,(x+b)} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b}$$

$$\frac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)\,....(n+p)} = \frac{1}{p}\left[\frac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)\,....(n+p-1)} - \frac{1}{(n+1)\,(n+2)\,....(n+p)}\right]$$

$$\prod_{k=0}^{p}\frac{1}{n+k} = \frac{1}{p}\left[\prod_{k=0}^{p-1}\frac{1}{n+k} - \prod_{k=1}^{p}\frac{1}{n+k}\right]$$

ex: $\frac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n\,(n+1)} - \frac{1}{(n+1)\,(n+2)}\right]$

$$\frac{3}{2}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{3}{2}\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)\,(k^2+k+1)}{(k+1)\,(k^2-k+1)} = \frac{3}{2}\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)\,(k\,(k+1)+1)}{(k+1)\,(k\,(k-1)+1)} = \frac{n^2+n+1}{n^2+n}$$

Sume - Calculul lui S_p - din aproape in aproape cunoscand S_{p-1} etc.

$$S_0 = \sum_{k=1}^{p} k^0 = 1+1+1+....p = p$$

$$S_1 = \sum_{k=1}^{p} k^1 = 1+2+3+....+p = \frac{p\,(p+1)}{2}$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{p} k^2 = 1^2+2^2+3^2+....+p^2 = \frac{p\,(p+1)}{2}\;\frac{(2\,p+1)}{3}$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^{p} k^3 = 1^3+2^3+3^3+....+p^3 = \left[\frac{p\,(p+1)}{2}\right]^2$$

....

$$S_{k-1} = \frac{(n+1)^k - (n+1) - C_k{}^2\,S_{k-2} - ....-C_k{}^{k-1}\,S_1}{k}$$ --- **formula generala**

ex: $S_9 = \sum_{k=1}^{p} k^9 = 1^9+2^9+3^9+....+p^9$ =?

-se dezvolta binomul--- $(k+1)^{10}$ --- pt--k $=0$,...n -- si se aduna-- rezulta;

$$(n+1)^{10} = C_{10}{}^1\left[1^9+2^9+3^9+....+n^9\right] + C_{10}{}^2\,S_8 + \;.....+ C_{10}{}^8\,S_2 + C_{10}{}^9\,S_1$$

$$S_9 = \frac{(n+1)^{10} - (n+1) - C_{10}{}^2\,S_8 - ....-C_{10}{}^1\,S_1}{10}$$

PROGRESII

$$N = \frac{\text{ultimul} - \text{primul}}{\text{ratia}} + 1; \; N - \text{nr de termeni}$$

a_n --- progr aritm

$a_n = S_{n+1} - S_n;$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2};$$

Progresii Geometrice

$$S_n = q^0 + q^1 + q^2 + \ldots + q^n = 1\,\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1};$$

ex: ---- pt ---- $q = \frac{-1}{a}$;

$$S_n = 1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{a^{n-1}} = 1\,\frac{\left(-\frac{1}{a}\right)^{n+1} - 1}{-\frac{1}{a} - 1} = \frac{a}{a+1}\left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{a^n}\right];$$

---se poate dem pt n par si n impar

ex: ---- pt ---- q = -a;

$$S_n = 1 - a + a^2 - a^3 + \ldots + (-1)^n a^n = 1\,\frac{(-a)^{n+1} - 1}{-a - 1} = \frac{1}{a+1}\left[1 + (-1)^{n+1} a^n\right];$$

--se poate dem pt n par si n impar

ex: -------------------------------

$$S_n = 3^{n-1} + 3^{n-2} + 3^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} \times 3^0 \; ---- \; q = ?$$

Cazul 1-- n = par --- n-1=impar --- --- progresia va fi:

$-1, 3, -9, 27, \ldots\ldots - 3^{n-4}, + 3^{n-3} - 3^{n-2} + 3^{n-1}$ -- $q = -3$; $b_1 = -1$; ---
-- avem --- N = n termeni

$$S_{n\,par} = \frac{1}{4}\left[3^n - 1\right]$$

Cazul 2-- n = impar --- n-1= par --- --- progresia va fi:

$1, -3, 9, -27, \ldots\ldots + 3^{n-2} - 3^{n-1}$ -- $q = -3$; $b_1 = 1$; ---
-- avem --- N = n termeni

$$S_{n\,par} = \frac{1}{4}\left[3^n + 1\right]$$

Exemplu --------------------

$$S = 5^2 + 5^4 + 5^6 + 5^8 + \ldots + 5^{2016} = 5^2\left(5^1 + 5^2 + \ldots + 5^{1008}\right) = 5^2 S_1;$$

$S_1 = 5\,\frac{5^{1008}-1}{5-1} = \frac{5}{4}\left(5^{1008}-1\right);$

Functia exponentiala

$f(x) = a^x;$

-- cond de exist a fc exp ---- $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$

$x^{impar} - y^{impar} = (x-y)\left(x^{k-1} + \ldots\right)$

$f[x]^{g[x]} = \text{def} = e^{g[x]\times \ln[f[x]]}$

Ecuatii si Inecuatii Irationale

$\sqrt{2-x} \geq 2x-1$; $(2x-1)$ --- poate fi pozitiv sau negativ

$$CE: \begin{cases} 2-x \geq 0 & x \in (-\infty, 2] \\ 2x-1 \geq 0 & x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \end{cases}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
2 - x	+++++++++++++++++0----------			
2 x - 1	----------0++++++++++++++++++			

Cazul 1 -----------$x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$

$\sqrt{2-x} \geq 2x-1$ pozitiv ≥ negativ "A" - luam tot intervalul

Solutie : $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$

Cazul 2 -----------$x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$

$\sqrt{2-x} \geq 2x-1$ pozitiv ≥ pozitiv - acelasi semn --- putem ridica la patrat

$2-x \geq 4x^2-4x+1$ ------- $4x^2-3x-1 \leq 0$ --- $x \in \left[\frac{-1}{4}, 1\right]$

$x \in \left[\frac{-1}{4}, 1\right]$

$x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ ---- intersectie --- $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

Raspuns : $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right] = (-\infty, 1]$

Alta metoda ----- $\sqrt{f(x)}$ ≥, ≤ $g(x)$ --
    Metoda graficelor ---- facem monotonia -- $f(x)$ si $g(x)$ si G_f, G_g

LOGARITMI

---formule importante

--$a > 1$ -- $\log_a \infty = +\infty$; $\log_a 0 = -\infty$

--$0 < a < 1$ -- $\log_a \infty = -\infty$; $\log_a 0 = +\infty$

$\log_{\frac{1}{2}} (3x - 4) > \log_{\frac{1}{2}} 5$; --- rezulta -- $3x - 4 < 5$;

$a^b = e^{\ln a^b} = e^{b \ln a}$

$x^{\log_x n} = n$

$\log_a b * \log_b c = \log_a c$

Exemplu --

$a = \log_3 48 = \log_3 2^4 \times 3$

$b = \log_5 90 = \log_3 2 \times 3^2 \times 5$

Sa se scrie $x = \log_{20} 60 = f(a, b)$

Luam una din bazele 2, 3, 5

Scriem toti logaritmii in baza 2

$$a = \frac{\log_2 2^4 \times 3}{\log_2 3}; \; b = \frac{\log_2 2 \times 3^2 \times 5}{\log_2 5}; \; x = \frac{\log_2 2^2 \times 3 \times 5}{\log_2 2^2 \times 5};$$

$$a = \frac{4 + \log_2 3}{\log_2 3};$$

$$b = \frac{1 + 2\log_2 3 + \log_2 5}{\log_2 5};$$

$$x = \frac{2 + \log_2 3 + \log_2 5}{2 + \log_2 5};$$

$\log_2 3 = t$; $\log_2 5 = u$;

$$x = \frac{2 + t + u}{2 + u};$$

$$a = \frac{4 + t}{t}; \; t = \frac{4}{a - 1};$$

$$b = \frac{2 + 2t + u}{2 + u}; \; u = \frac{2(a - 1) - 2b(a - 1)}{(a - 1)(b - 1)};$$

$$x = \frac{2 + t + u}{2 + u} =$$ se inlocuieste t si u

NUMERE COMPLEXE

$\frac{a+bi}{c+di} \in R$ --- daca --- $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$;

$\overline{f(z)} = f(\overline{z})$

$\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}$

$\overline{z * w} = \overline{z} * \overline{w}$

$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$

$\overline{z} = z$ ---- daca si numai daca $z \in R$ ---- rezulta---- Imaginar $(z) = 0$

$\overline{z} = -z$ ---- rezulta---- Real $(z) = 0$

$z * \overline{z} = |z|^2$

$\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$

$|z^n| = |z|^n$

$|z| = |\overline{z}|$

$|z| = 1$ --- daca si numai daca --- $\overline{z} = \frac{1}{z}$

$z^{-1} = \frac{1}{z}$

$Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$

$Imaginar(z) = \frac{z - \overline{z}}{2}$

$Re(z) = 0$ --- daca si numai daca -- $z = -\overline{z}$

$Imaginar(z) = 0$--- daca si numai daca -- $z = \overline{z}$

Imaginea geometrica a unui nr complex

$arg(z^n) = n * arg(z)$

Scrierea sub forma trig a unui nr complex

$z \in \mathbb{C}$

$z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

-etapa1 ---

$a = Re(z) = -\sqrt{2}$

$b = Imag(z) = \sqrt{2}$

$M(a, b) = M\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ ---- cadranul II

-etapa2 ---

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2+2} = 2$

-etapa3 ---

$\alpha = \arg(z) = \pi - \operatorname{arctg}\left|\frac{b}{a}\right| = \pi - \operatorname{arctg}(1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4};$

-etapa4 ---Scriem nr complex sub forma trigon

$z = a + b\,i = r\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

$z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

Sa se calculeze z^{10} cu formula lui Moivre -----------------------

$z^{10} = \left(-\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i\right)^{10} = 2^{10}\left(\cos 10 * \frac{3\pi}{4} + i\sin 10 * \frac{3\pi}{4}\right)$

Argumentul numarului complex z

$\operatorname{Arg}(z) = \{\alpha + 2k\pi\}$

Argumentul redus al numarului complex z $= \alpha \in \{0,2\pi\}$

$$\arg(z) = \alpha = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left|\frac{b}{a}\right| & M \in CI \\ \pi - \operatorname{arctg}\left|\frac{b}{a}\right| & M \in CII \\ \pi + \operatorname{arctg}\left|\frac{b}{a}\right| & M \in CIII \\ 2\pi - \operatorname{arctg}\left|\frac{b}{a}\right| & M \in CIV \end{cases}$$

---pe axe -- $(OX+) \to \alpha = 0$; $(OX-) \to \alpha = \pi$;

$(OY+) \to \alpha = \frac{\pi}{2}$; $(OX-) \to \alpha = \frac{3\pi}{2}$; ----

Operatii cu numere complexe sub forma trigon

$z1 = r(\cos\alpha 1 + i\sin\alpha 1)$; $z2 = r(\cos\alpha 2 + i\sin\alpha 2)$;

$z1 = z2$ ---- rezulta --- $r1 = r2$; $\alpha 1 = \alpha 2 + 2k\pi$

$z1\,z2 = r1\,r2\,(\cos(\alpha 1 + \alpha 2) + i\sin(\alpha 1 + \alpha 2))$

$\frac{z1}{z2} = \frac{r1}{r2}(\cos(\alpha 1 - \alpha 2) + i\sin(\alpha 1 - \alpha 2))$

$z^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$ --- Moivre

ECUATII BINOME

Ecuatii Binome---radacina de ordinul 7 al numarului complex z1

$z^7 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

---notam ----- $z1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$ --- si il scriem sub forma trig

$$z1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$z_k = \sqrt[7]{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{7} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{7}\right) \text{ --}$$

-- $k = \{0, 1, 2, \ldots 6\}$ --- 7 radacini

Radacina de ordinul n al unitatii

$z^n = 1$

$$z_k = \sqrt[n]{1}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) \text{ ---- } k = \{0, 1, 2, \ldots n-1\}$$

ECUATII BIPATRATE

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ ----- facem substitutia

$x^2 = t > 0$

$t^2 - 5t + 4 = 0$

$(t-1)(t-4) = 0$

$x^2 = 1$ ---- $x_{1-2} = \pm 1$

$x^2 = 4$ ---- $x_{3-4} = \pm 2$

Compunerea functiilor cu ramificatie

Exemplu1 --

$f, g : R \to R$

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 1 & x < 0 \\ 1 - x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq -2 \\ 2x - 1 & x > -2 \end{cases}$$

$h(x) = (f o g)(x) = f(g(x)) = ?$

Rezolvare

$$h(x) = f(g(x)) = \begin{cases} 5g(x) + 1 & g(x) < 0 \\ 1 - g^2(x) & g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Etapa1: ----------- inlocuim in h(x) pe $g(x) = x^2$, $x \leq -2$ ------------------------

$$h1(x) = \begin{cases} 5x^2 + 1 & x^2 < 0,\ x \leq -2 \text{ intersectie },\ x = \text{multimea vida} \\ 1 - (x^2)^2 & x^2 \geq 0,\ x \leq -2 \text{ intersectie },\ x \in (-\infty, -2] \end{cases}$$

Etapa2: ----------- inlocuim in h(x) pe $g(x) = 2x - 1$, $x > -2$ ------------------------

$$h2(x) = \begin{cases} 5(2x-1)+1 & 2x-1<0,\ x>-2 \text{ intersectie },\ x\in\left(-2,\frac{1}{2}\right) \\ 1-(2x-1)^2 & 2x-1\geq 0,\ x>-2 \text{ intersectie },\ x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right) \end{cases}$$

Etapa3: -----------final--luam toate intervalele

pt --- $x\in(-\infty,-2]$ --- $h(x)=1-x^4$

pt --- $x\in\left(-2,\frac{1}{2}\right)$ --- $h(x)=10x-4$

pt --- $x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$ --- $h(x)=-4x^2+4x$

$$h(x) = \begin{cases} 1-x^4 & x\in(-\infty,-2] \\ 10x-4 & x\in\left(-2,\frac{1}{2}\right) \\ -4x^2+4x & x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right) \end{cases}$$

Exemplu2 ---

$$f(x) = \begin{cases} x-3 & x\geq 3 & = f1(x) \\ 2x+1 & x<3 & = f2(x) \end{cases}$$

$g(x)=4x+3,\ x\in R$

$$gof = g(f(x)) = \begin{cases} 4f1(x)+3 & f1(x)\in R & =4x-9,\ x\geq 3 \\ 4f2(x)+3 & f2(x)\in R & =8x+7,\ x<3 \end{cases}$$

$$fog = f(g(x)) = \begin{cases} g(x)-3 & g(x)\geq 3 & =4x, & 4x+3\geq 3,\ x\geq 0 \\ 2g(x)+1 & g(x)<3 & =8x+7, & 4x+3<3,\ x<0 \end{cases}$$

$gog = g(g(x)) = 4(4x+3)+3 = 16x+15,\ x\in R$

FUNCTII

$f: A \to B$ ---- Multimea A este preimaginea multimii B prin fc $f(x)$

Simetria G_f

fc pare --- G_f este simetric fata de OY -- ne gandim la fc ---- $\cos(x)$

fc impare --- G_f este simetric fata de originea axelor -- ne gandim la fc ---- $\sin(x)$

G_f are centrul de simetrie punctul A (a,b) daca --- $f(x)+f(2a-x)=2b$

G_f are axa de simetrie $x=a$ daca --- $f(a+x)=f(a-x)$ -- sau -- $f(x)=f(2a-x)$

ECUATII DE GRADUL II

Pozitia radacinilor ec de gradul 2 fata de un nr real -- ---- $ax^2+bx+c=0$ cu x_1, x_2 -sol reale

Cazul 1 : --- $x_1<\alpha<x_2$ $\begin{cases} \text{delta}>0 & \alpha \\ a f(\alpha)<0 & \text{interior} \end{cases}$

Cazul 2 : --- $x_1 \le x_2 < \alpha$ $\begin{cases} \text{delta} \ge 0 & \alpha \\ a f(\alpha) > 0 & \text{exterior} \\ \frac{-b}{2a} < \alpha & \square \end{cases}$

Cazul 3 : --- $\alpha < x_1 \le x_2$ $\begin{cases} \text{delta} \ge 0 & \alpha \\ a f(\alpha) > 0 & \text{exterior} \\ \frac{-b}{2a} > \alpha & \square \end{cases}$

Pozitia radacinilor ec de gradul 2 fata de doua nr real α , β ------ $a x^2 + b x + c = 0$ cu x_1, x_2 -sol reale

$x_1 < \alpha < x_2 < \beta$ $\begin{cases} \text{delta} > 0 & \square \\ a f(\alpha) < 0 & \alpha \text{ interior} \\ a f(\beta) > 0 & \beta \text{ exterior} \end{cases}$

$x_1 < \alpha < \beta < x_2$ $\begin{cases} \text{delta} > 0 & \square \\ a f(\alpha) < 0 & \alpha \text{ interior} \\ a f(\beta) < 0 & \beta \text{ interior} \end{cases}$

$\alpha < x_1 < x_2 < \beta$ $\begin{cases} \text{delta} > 0 & \square \\ a f(\alpha) > 0 & \alpha \text{ exterior} \\ a f(\beta) > 0 & \beta \text{ exterior} \end{cases}$

$\alpha < x_1 < \beta < x_2$ $\begin{cases} \text{delta} > 0 & \square \\ a f(\alpha) > 0 & \alpha \text{ exterior} \\ a f(\beta) < 0 & \beta \text{ interior} \\ \frac{-b}{2a} > \alpha & \square \end{cases}$

Cond ca 2 ec de gr 2 sa aiba aceleasi rad $a_1 x^2 + b_1 x + c_1 = 0$, $a_2 x^2 + b_2 x + c_2 = 0$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Cond ca 2 ec de gr 2 sa aiba o rad comuna $a_1 x^2 + b_1 x + c_1 = 0$, $a_2 x^2 + b_2 x + c_2 = 0$

$$x_0 = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_2 b_1 - a_1 b_2} \quad \text{daca} \quad (a_1 c_2 - a_2 c_1)^2 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)(b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

$$a x^2 + b x + c = a (x - x_1)(x - x_2)$$

$$a x^2 + b x + c = a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{-\text{delta}}{4a}\right)$$

$$V_1 = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}; \; V_2 = \frac{c}{a};$$

$$x^2 - V_1 x + V_2 = 0$$

$$V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\text{delta}}{4a}\right) \text{ --- varful parabolei}$$

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{V_1^2 - 4 V_2}$$

COMBINATORICA

C_n^k --- A_n^k -- P_n --- $n \in N^*$; $k \in N$;

--- cond de exist :

$n > 0$;
$n \geq k$;
$k \geq 0$;

Formule :

$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$; --- formula de recurenta

$$\frac{C_n^k}{C_{n-1}^{k-1}} = \frac{n}{k}; \quad \frac{C_{n+1}^{k+1}}{C_n^k} = \frac{n+1}{k+1};$$

$$\sum_{k=1}^{n} k\, C_n^k = n\, 2^{n-1}$$

$P_n = n!, \quad n \in N$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \quad n \geq k,\ k \in N$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\, k!}, \quad 0 \leq n \leq k,\ k \in N$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^{n-k}\, b^k$$

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, C_n^k\, a^{n-k}\, b^k$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^k C_n^n = 0;$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n;$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^{2k} = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots + C_n^{2n} = 2^{n-1};$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^{2k+1} = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots + C_n^{2n+1} = 2^{n-1};$$

$T_{k+1} = C_n^k\, a^{n-k}\, b^k$

nr total de termeni $= n + 1$

termenul din mijloc = $T_{\frac{n+1}{2}}$

Pret final -- $P_f = P_i \pm \frac{a}{100} P_i$

Probleme de Numarare; Fie A, B, C -- 3 multimi finite nevide

1) $\text{card}(A \bigcup B) = \text{card}\,A + \text{card}\,B - \text{card}(A \bigcap B)$

2) $\text{card}(A \bigcup B) = \text{card}(A \bigcap B) + \text{card}(A \backslash B) + \text{card}(B \backslash A)$

3) $\text{card}(A x B) = \text{card}\,A\ \text{card}\,B$

4) $\text{card}(B \backslash A) = \text{card}\,B - \text{card}(B \bigcap A)$

5) $\text{card}(A x B x C) = \text{card}\,A\ \text{card}\,B\ \text{card}\,C$

6) $\text{card}(A \bigcup B \bigcup C) = \text{card}\,A + \text{card}\,B + \text{card}\,C - \text{card}(A \bigcap B) - \text{card}(A \bigcap C) - \text{card}(B \bigcap C)$;

Probleme de numarare --- la submultimi folosim combinari
---- la numere folosim aranjamente

Fie $f : A \to B$

$\text{card}\,A = |A| = a$

$\text{card}\,B = |B| = b$

1) Nr total functii = b^a

2) Exista fc injective daca $a \le b$ --- nr fc inj = $A_b^{\,a}$

3) Exista fc surjective daca $a \ge b$ ---

$$\text{nr fc surj} = b^a - C_b^{\,1}(b-1)^a + C_b^{\,2}(b-2)^a - \ldots + (-1)^{b-1} C_b^{\,b-1} = \sum_{k=0}^{b-1} (-1)^k C_b^{\,k} (b-k)^a$$

4) Exista fc bijective daca $a = b$ --- nr fc bij = $P_a = A_a^{\,a} = a!$

5) Pentru --- $A, B \subset R$ exista fc $f : A \to B$ strict cresc (descresc) daca $a \le b$

nr fc strict cresc = $C_b^{\,a}$

6) Pentru --- $A, B \subset R$ exista fc $f : A \to B$ cresc (descresc) daca $a \le b$

nr fc cresc = $C_{a+b-1}^{\,a}$

7) Numarul fc strict monotone = $2\,C_b^{\,a}$ si $a \le b$

8) Numarul fc monotone = $2\,C_{a+b-1}^{\,a}$

Procente -- TVA -- scumpiri ieftiniri

$$\text{Pret vanzare} = \text{Pret de achizitie} + \frac{TVA}{100}\,\text{Pret de achizitie}$$

Pret final = Pret initial $\pm \frac{a}{100}$ Pret initial; a --- scumpire -- ieftinire

1. Permutări

Definiția 1. O mulțime împreună cu o ordine bine determinată de dispunere a elementelor sale este o <u>*mulțime ordonată*</u> şi se notază *$(a_1,a_2,\ldots,a_n)$*.

Definiția 2. Se numesc <u>*permutări*</u> ale unei mulțimi A cu n elemente toate mulțimile ordonate care se pot forma cu cele n elemente. Numărul permutărilora n elemente, $n\in\mathbf{N}^*$, este $P_n=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n = n!$; $0! = 1$ (prin definiție).

Factorial (proprietăți): $n! = (n-1)!n$; $n! = \dfrac{(n+1)!}{n+1}$

2. Aranjamente

Definiția 1. Se numesc <u>*aranjamente* a n elemente luate câte m</u> ($m\le n$) ale unei mulțimi A cu n elemente, toate submulțimile ordonate cu câte m elemente care se pot forma din cele n elemente ale mulțimii A. Se notează A_n^m.

Numărul aranjamentelor a n elemente luate câte m este:

$$A_n^m = n(n-1)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!},\ n\ge m.$$

Proprietăți: $A_n^n = P_n$; $A_n^n = \dfrac{n!}{0!}$ sau $A_n^n = n!$; $A_n^{n-1} = A_n^n$; $A_n^0 = 1$.

3. Combinări

Definiția.1. Se numesc <u>combinări a n elemente luate câte m</u> ($m\le n$) ale unei mulțimi A cu n elemente toate submulțimile cu câte m elemente, care se pot forma din cele n elemente ale mulțimii A. Se notează C_n^m.

Proprietăți:

1. $C_n^1 = n$; $C_n^n = C_n^0 = C_0^0 = 1$; 2. $C_n^n = C_n^{n-m}$; **3.** $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$;
4. Numărul submulțimilor unei mulțimi cu n elemente este 2^n;
5. $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^{m-1} + \ldots + C_{m+1}^{m-1} + C_m^{m-1} + C_{m-1}^{m-1}$;
6. $\dfrac{n!}{p_1!\,p_2!\ldots p_n!} = C_n^{p_1} C_{n-p_1}^{p_2} \ldots C_{n-(p_1+\ldots+p_{m-1})}$ unde $p_1 + \ldots p_{m-1} < n$

4. Binomul lui Newton

$$(x+a)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} a + \ldots + C_n^k x^{n-k} a^k + \ldots + C_n^n a^n$$

$$(x-a)^n = C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} a + \ldots + (-1)^k C_n^k x^{n-k} a^k + \ldots + (-1)^n C_n^n a^n$$ unde $n\in\mathbf{N}$.

Proprietăți:

1. Termenul de rank $k+1$ este $T_{k+1} = (-1)^k C_n^k x^{n-k} a^k$;
2. $C_n^{k+1} = \dfrac{n-k}{k+1} C_n^k$; $C_{n+1}^{k+1} = \dfrac{n-k}{k+1} C_n^k$;
3. $T_{k+2} = \dfrac{n-k}{k+1}\cdot\dfrac{a}{x}\ T_{k+1}$ sau $T_{k+2} = -\dfrac{n-k}{k+1}\cdot\dfrac{a}{x}\ T_{k+1}$;
4. Numărul termenilor dezvoltării $(x \pm a)^n$ este $n+1$;
5. Coeficienții termenilor egal depărtați de extremi sunt egali.

Relații importante:

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n; C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0;$$

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = 2^{n-1}; C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1};$$

$$C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2$$

Dezvoltări particulare uzuale:

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;
2. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$;
3. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
4. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
5. $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) + 6abc$;
6. $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

5. Suma puterilor asemenea ale primelor *n* numere naturale

Dacă $S_p = 1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p$, $p \in \mathbf{N}$, atunci avem:

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2};\ S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};\ S_3 = \left[\frac{n(n+1}{2}\right]^2$$

$$S_4 = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30};\ S_5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2 + 2n - 1)}{12}$$

O relație care permite calculul lui S_p, când se cunosc $S_{p-1}, S_{p-2}, \ldots, S_1$ este formula lui Pascal:

$$(n+a)^{p+1} = 1 + C_{p+1}^1 S_p + C_{P+1}^2 S_{p-1} + \ldots + C_{p+1}^p S_1 + n$$

6. Probabilitate

Definiție. Pobabilitatea unui eveniment este egală cu raportul dintre numărul cazurilor egal posibile care realizeaza evenimentul şi numărul cazurilor egal posibile.

Aşadar, vom spune că probabilitatea evenimentului A este egală cu raportul dintre numărul *m* al cazurilor favorabile realizarii evenimentului A şi numărul *n* al cazurilor egal posibile. Vom scrie

$$p(A) = \frac{m}{n}.$$

Geometrie Plana – Formule

Triunghi

Triunghi dreptunghic :

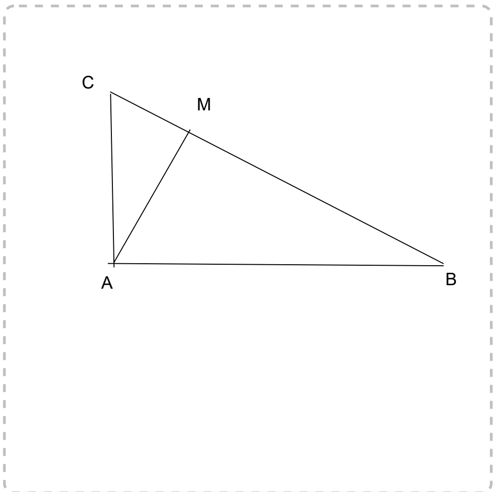
$AM^2 = CM\ MB;$

$AC^2 = CM\ BC;$

$AB^2 = BM\ BC;$

$AM = \frac{c1\ c2}{ip};$

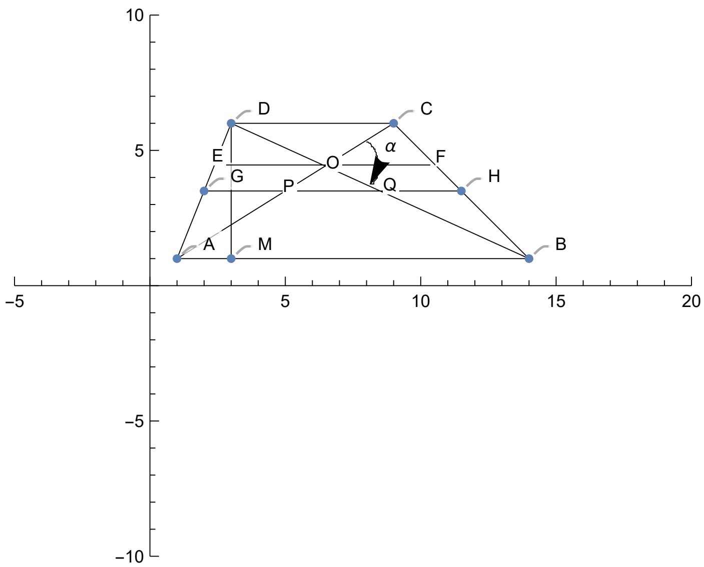
$Aria = \frac{c1\ c2}{2};$



Poligon Convex cu –– n laturi

Nr diagonalelor $= C_n^{\ 2} - n;$

Trapezul oarecare



OE = OF;

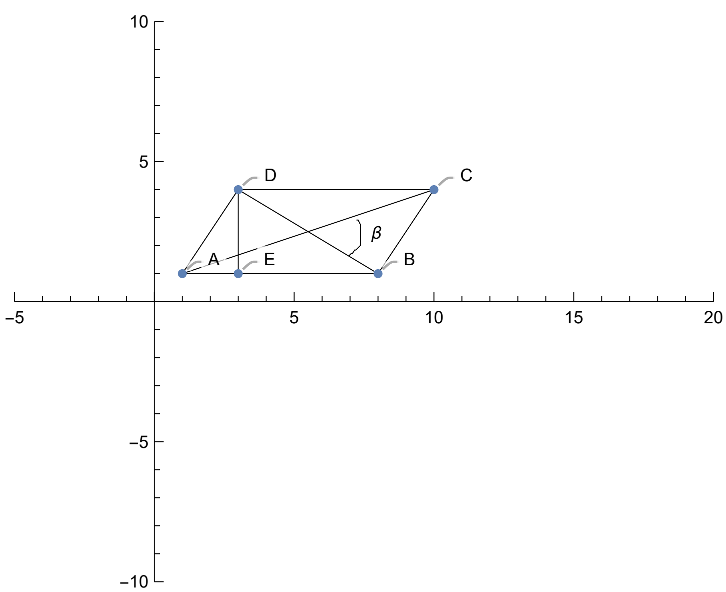
$$GH = \frac{AB + CD}{2} = \frac{a + b}{2}$$ **---- linia mijlocie in trapez**

$$PQ = \frac{a - b}{2}$$

$$d_1^{\;2} + d_2^{\;2} = AD^2 + BC^2 + 2\,AB\,DC$$

$$A = \frac{(DC + AB)\;AE}{2} = \frac{(a + b)\;h}{2} = \frac{d_1\,d_2 \sin\alpha}{2}$$

Paralelogramul



$$P = 2\;(AB + BC)$$

$AB = a;\ BC = b;\ DE = h;$

$A = a\,h = a\,b\,\sin A = \frac{d_1\,d_2\,\sin\beta}{2}$ --- la romb $\beta = 90^o$ -- $A = \frac{d_1\,d_2}{2}$

--- la romb ----- $A = \frac{d_1\,d_2}{2} = l\,h = l^2 \sin A$

--- la dreptunghi -- $d_1 = d_2 = d$ ---- $A = L\,l = \frac{d^2 \sin\beta}{2}$; $d = \sqrt{L^2 + l^2}$;

Teorema Paralelogram --- $d_1^2 + d_2^2 = 2\left(a^2 + b^2\right)$ --- $d_1 = DB;\ d_2 = AC;$

Dem : Triung. ACB --- din Teorem. Cosinusurilor

$AC^2 = d_2^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos(B) = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos(\pi - A) = a^2 + b^2 + 2\,a\,b\cos(A)$

$DB^2 = d_1^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos(A)$

-- daca adunam rezulta relatia : $d_1^2 + d_2^2 = 2\left(a^2 + b^2\right)$

GEOMETRIE ANALITICA

Triunghi ascutitunghic -- - varfurile unui triunghi scrise vectorial

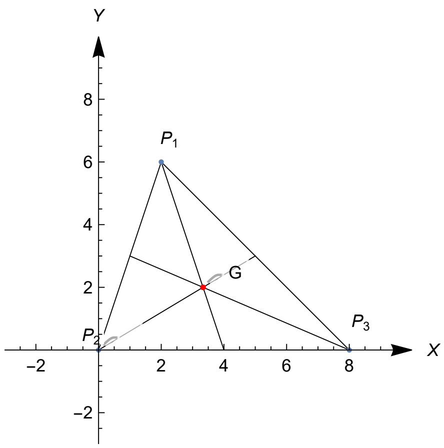
$P_1\ (x_1,\ y_1)$: --- $\vec{p_1} = x_1\ \vec{i} + y_1\ \vec{j}$;

$P_2\ (x_2,\ y_2)$: --- $\vec{p_2} = x_2\ \vec{i} + y_2\ \vec{j}$;

$P_3\ (x_3,\ y_3)$: --- $\vec{p_3} = x_3\ \vec{i} + y_3\ \vec{j}$;

$Pct = \lambda_1\ P_1 + \lambda_2\ P_2 + \lambda_3\ P_3$; --- cu -- $\lambda_i \geq 0$

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$;



Distanta dintre 2 drepte (paralele) = dist dintre ($A \in d_1$) si d_2

$d_1 : a_1\ x + b_1\ y + c_1 = 0$;

$d_2 : a_2\ x + b_2\ y + c_2 = 0$; ---- cu -- $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$;

$$dist\ (A,\ d_2) = \frac{|\ a_2\ x_A + b_2\ y_A + c_2\ |}{\sqrt{a_2^{\ 2} + b_2^{\ 2}}};$$

Unghiul dintre 2 drepte cu pantele m1 si m2

$$tg\ (\beta) = \left| \frac{m1 - m2}{1 + m1\ m2} \right|$$

Unghiul format de dreptele :

$d_1 : a_1\ x + b_1\ y + c_1 = 0$;

$d_2 : a_2\ x + b_2\ y + c_2 = 0$;

--- admite 2 bisectoare (interioara si exterioara) de ecuatii :

$$\frac{a_1\ x + b_1\ y + c_1}{\sqrt{a_1^{\ 2} + b_1^{\ 2}}} = \pm \frac{a_2\ x + b_2\ y + c_2}{\sqrt{a_2^{\ 2} + b_2^{\ 2}}}$$

Simetricul lui A fata de B ---- fata de-- in mijloc

A (xA, yA)

B (xB, yB) --- in mijloc

A' (xA', yA') -- simetricul lui A

Distanta dintre 2 drepte paralele--- d1 || d2

--se ia un punct oarecare M ∈ d1

$$\text{dist}(M1, d2) = \frac{| a\, x_{M1} + b\, y_{M1} + c |}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Aria unui triunghi folosind dist de la un pct la o dreapta

$$A = \frac{\text{dist}(A, d_{BC}) * BC}{2}$$

Coord simetricului unui punct $P(3, 6)$ fata de o dreapta d:y=x+1,

---- va fi punctul $P'(x_{P'}, y_{P'})$

Etapa1 ----------scrierea ec dreptei $d_{PP'}: y - 6 = \frac{-1}{m_d}(x - 3)$ -- unde $m_d = 1$

$d_{PP'} : y = -x + 9$

Etapa 2 ------------ punctul $Q(x_Q, y_Q) = d \cap d_{PP'}$

$d: \quad y = x + 1$

$d_{PP'} : y = -x + 9$

$x_Q = 4;\ y_Q = 5$

Etapa 3------------aflarea lui $P'(x_{P'}, y_{P'})$ din Q este mijlocul lui PP'

P (3, 6)

Q (4, 5)

$P'(x_{P'}, y_{P'})$

$x_{P'} = 5;\ y_{P'} = 4;$

Ecuatia dreptei simetrice a dreptei d_{AB} fata de dreapta d_{OA}

-- Cunoastem punctele A(2,1) si B(0,-1)

Etapa 1 ------- aflarea ec dreptei d_{AB} -- $y - y_B = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_B)$

$d_{AB} : y = x - 1$

Etapa 2 ------- aflarea ec dreptei d_{OA} -- $y - y_O = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O}(x - x_O)$

$d_{OA} : y = \frac{1}{2} x$

Etapa 3 ------- calculam simetricul lui B fata de d_{OA} adica punctul B'

-- ducand o perpend din B pe d_{OA}-- rezulta ec dreptei d_B

$d_B : y - y_B = \frac{-1}{m_{OA}} (x - x_B)$

$d_B : y = -2x - 1$

--- se calc coord $M(x_M, y_M) = d_B \cap d_{OA}$

$y = -2x - 1$

$y = \frac{1}{2} x$

$M(x_M, y_M) = M\left(\frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}\right)$

--- se calc coord $B'(x_{B'}, y_{B'})$ din M mijlocul lui BB'

$B(0, -1)$

$M\left(\frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}\right)$

$B'(x_{B'}, y_{B'})$

$x_{B'} = \frac{-4}{5}$; $y_{B'} = \frac{3}{5}$;

Etapa 4 ---- ec dreptei simetrice cautate va fi $d_{AB'} : y - y_A = \frac{y_{B'} - y_A}{x_{B'} - x_A} (x - x_A)$

$d_{AB'} : x - 7y + 5 = 0$

LINII IMPORTANTE IN TRIUNGHI

Relatii vectoriale intre elementele unui triunghi (identitati vectoriale);

A – aria triung ABC

$\vec{i_a}$ **– bisectoarea din A**

$\vec{m_a}$ **– mediana din A**

$\vec{h_a}$ **– inaltimea din A**

$\vec{m_a}\,\vec{i_a} = p(p-a)$; --- si analoagele --- $\vec{m_b}\,\vec{i_b} = p(p-b)$; $\vec{m_c}\,\vec{i_c} = p(p-c)$;

$\vec{m_a}\,\vec{h_a} = \frac{4A^2}{a^2}$; --- si analoagele

$\vec{i_a}\,\vec{h_a} = \frac{4A^2}{a^2}$; --- si analoagele

$\vec{m_a}\,\vec{a} = \frac{1}{2}(b^2 + c^2)$; --- si analoagele

---

Daca --- ABC = triung oarecare si $M \in (BC)$ si $\frac{MB}{MC} = k$;

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + k\,\overrightarrow{AC}}{k+1}$$

$\overrightarrow{m_a} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}}{2}$; --- si analoagele

$\overrightarrow{i_a} = \frac{b\,\overrightarrow{AB} + c\,\overrightarrow{AC}}{b+c}$; --- si analoagele

$\overrightarrow{h_a} = \frac{b \cos C\ \overrightarrow{AB} + c \cos B\,\overrightarrow{AC}}{a}$; --- si analoagele

----

$R > 2r$;

$d^2 = R(R - 2r)$; -- rel lui Euler

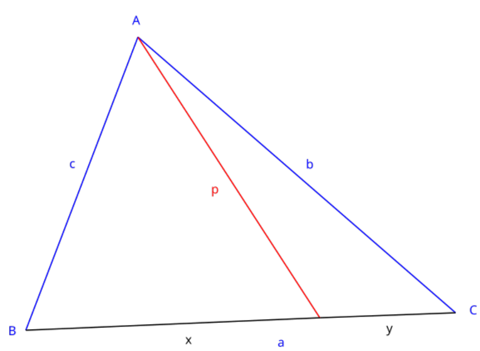
d -- este distanta dintre centrul cercului circumscris si centrul cercului inscris intr - un triunghi,

R --- raza cercului circumscris si

r--- raza cercului inscris in triunghi

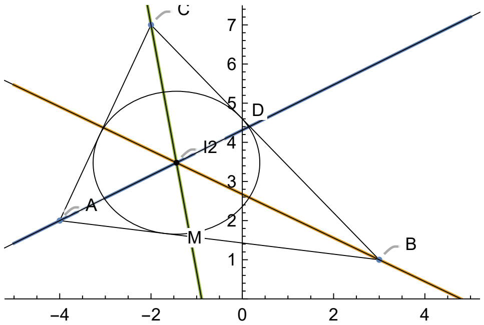
Teorema Silvester

$a\left(p^2 + x\,y\right) = b^2\,x + c^2\,y$;



Bisectoare –Centrul cerc inscris in triunghi (la int bisectoarelor) –– I (x_I, y_I)

Teorema Bisect -- $\frac{CA}{AM} = \frac{CB}{BM}$; $BC = a$; $AC = b$; $AB = c$; $p = \frac{a+b+c}{2}$;



$I(x_I, y_I) = I\left(\frac{a x_A + b x_B + c x_C}{a+b+c}, \frac{a y_A + b y_B + c y_C}{a+b+c}\right)$; I – centru cerc inscris

$r = \frac{A_{ABC}}{p}$; $A = A_{ABC}$ = toate formulele;

-- ex -- Heron -- $r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$;

--r – raza cerc insacris

$b_a = AD = \frac{2bc}{b+c}\cos\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{4bc}{(b+c)^2}p(p-a)}$; --- lungimea bisect din A

Bisectoarea este locul geometric al punctelor egal depărtate de laturile unghiului

Fie 2 drepte de ec generale:

$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$--- – d_1

$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$--- – d_2

Ecuatiile bisectoarelor interioare si exterioare unghiului format de 2 drepte sunt :

$$\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

M (x, y) in planul triung. ---

$$\overrightarrow{MI} = \frac{a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}}{a+b+c}$$

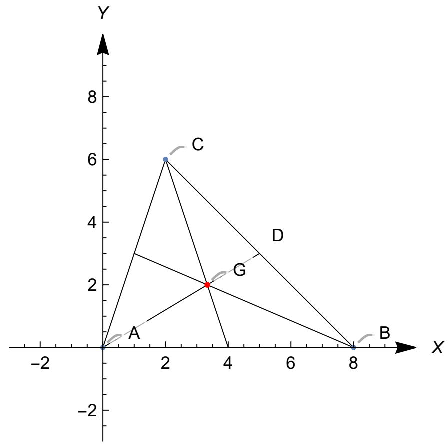
raza cerc inscris in tr. dreptunghic --- $r = \frac{c1 + c2 - ip}{2}$

Panta bis unui unghi in fc de pantele dreptelor (m_1, m_2) (laturilor) unghiului

$$m_{bis} = \frac{m_1\sqrt{1+m_2^2} + m_2\sqrt{1+m_1^2}}{\sqrt{1+m_1^2} + \sqrt{1+m_2^2}};$$

Mediane – Centrul de Greutate al triunghiului

-– la int medianelor triung. –G (x_G, y_G)



$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$;

$\overrightarrow{GD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$;

Teorema Medianei in tr. ABC -- BC = a; AC = b; AB = c; m_a –
--mediana din A (pe mijl lui BC)

$m_a{}^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$; $m_b{}^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4}$; $m_c{}^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$;

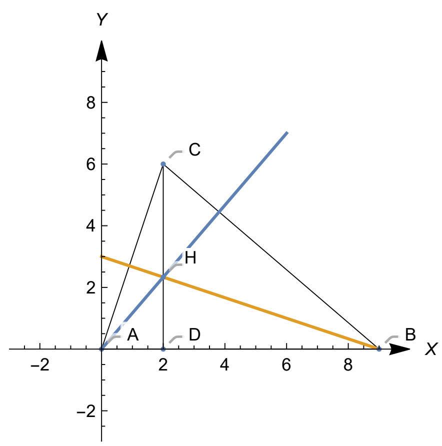
triung dreptunghic in A--- $m_a = \frac{ip}{2}$;

$G(x_G, y_G =)\ G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$

Orice punct din plan $M(x_M, y_M)$ verifica rel

$3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

Inaltimi – Ortocentrul triung. (la int inaltimilor triung) – --- H (x_H, y_H)



$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3\,\overrightarrow{HG}$

$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3\,\overrightarrow{HO}$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH} = \vec{0}$

$\overrightarrow{GH} = 2\,\overrightarrow{OG}$

$d_{BC} : a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$

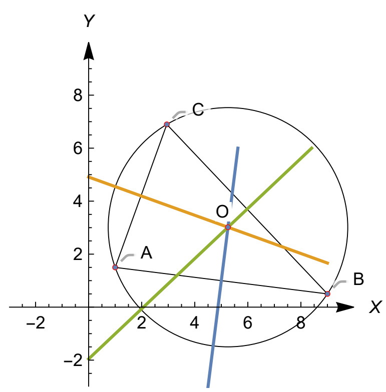
$d(A, BC) = \frac{| a_1 x_A + b_1 y_A + c |}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}$ --- ec inaltimii din A

$d_{AC} : a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$

$d(B, AC) = \frac{| a_2 x_B + b_2 y_B + c_2 |}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$ --- ec inaltimii din B

$H = d(A, BC) \cap d(B, AC)$

Mediatoare – Centrul cerc circumscris in triunghi (la int mediatoarelo r Δ ABC)



$O(x_O, y_O)$ -- centrul cerc circumscris

$OA = OB = OC = R$ --- raza cerc circumscris $\quad A = \frac{a\,b\,c}{4\,R} = p\,r$

$a = BC;\ b = AC;\ c = AB;$

$R = \frac{a\,b\,c}{4\,A};\ 2\,R = \frac{a}{\sin A} + \frac{b}{\sin B} + \frac{c}{\sin C};$ --- raza cerc circums. triung ABC

Aflarea coord centrului cerc circumscris triunghiului ABC -
- la int mediatoarelor a 2 laturi care au ecuatiile:

M--- mijlocul lui AB

N--- mijlocul lui AC

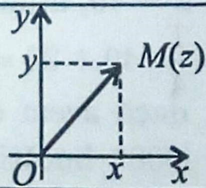
--- ec mediatoarelor sunt :

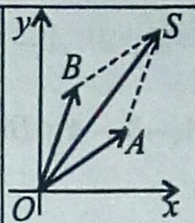
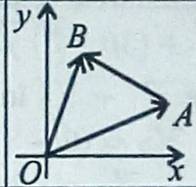
$$y - y_M = \frac{-1}{m_{AB}} (x - x_M)$$

$$y - y_N = \frac{-1}{m_{AC}} (x - x_N)$$

O (centrul cerc circ), G (centr. de greut.), H (ortocentru) --
--sunt coliniare in tr. ABC

REZUMATUL CAPITOLULUI

Noţiuni	**Notaţii. Formule**	**Semnificaţii. Interpretare geometrică**
Punct în planul xOy	$M(x, y)$	x = abscisa, y = ordonata (lui M); x, y = coordonatele punctului M
Vector legat de O al punctului M	$\overrightarrow{r_M} = x\vec{i} + y\vec{j}$	$\vec{r}_M = \overrightarrow{OM}$ 
Afixul punctului $M(x, y)$	$M(z)$, $z = x + iy$	M = imaginea geometrică a numărului complex
Distanţa între punctele $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$	$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	
Lungimea vectorului legat $\overrightarrow{r_M} = x\vec{i} + y\vec{j}$	$\lvert\overrightarrow{r_M}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$	

Suma a doi vectori legaţi $\overrightarrow{r_A} = x_1\overrightarrow{i} + y_1\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{r_B} = x_2\overrightarrow{i} + y_2\overrightarrow{j}$	$\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} =$ $= (x_1 + x_2)\overrightarrow{i} + (y_1 + y_2)\overrightarrow{j}$	 Regula paralelogramului
Înmulţirea unui vector legat $\overrightarrow{r_M} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ cu un scalar $\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha\overrightarrow{r_M} = \alpha x\overrightarrow{i} + \alpha y\overrightarrow{j}$	• $\alpha\overrightarrow{r_M}$ are acelaşi semn cu $\overrightarrow{r_M}$, dacă $\alpha > 0$ şi semn contrar lui $\overrightarrow{r_M}$, dacă $\alpha < 0$
Vectorul $\overrightarrow{AB}$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_A} =$ $= (x_2 - x_1)\overrightarrow{i} + (y_2 - y_1)\overrightarrow{j}$	
Lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}$	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = AB =$ $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	
Coordonatele punctului $M(x_M, y_M)$ pentru care $\dfrac{AM}{MB} = k$, $M \in [AB]$	$x_M = \dfrac{x_A + kx_B}{1 + k}$, $y_M = \dfrac{y_A + ky_B}{1 + k}$	Pentru M mijlocul segmentului $[AB]$: $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$, $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$
Ecuaţia dreptei determinată de un punct $A(x_1, y_1)$ şi pantă m	$y - y_1 = m(x - x_1)$	
Ecuaţia dreptei determinată de două puncte $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$	$y - y_1 =$ $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$	$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
Ecuaţia explicită a dreptei	$y = mx + n$	m = panta dreptei n = ordonata la origine a dreptei
Ecuaţia generală a dreptei	$ax + by + c = 0$; $a^2 + b^2 \neq 0$	
Două drepte $(d_1): y = m_1x + n_1$ $(d_2): y = m_2x + n_2$ pentru care	$m_1 = m_2$, $n_1 \neq n_2$	sunt paralele $((d_1) \parallel (d_2))$
	$m_1 = m_2$, $n_1 = n_2$	coincid $((d_1) \equiv (d_2))$
	$m_1 \neq m_2$	sunt concurente
	$m_1 \cdot m_2 = -1$	sunt perpendiculare $((d_1) \perp (d_2))$

VECTORI

Vectorii de pozitie a punctelor --- P_1, P_2, P_3

$P_1(x_1, y_1)$: --- $\vec{v_1} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$;
$P_2(x_2, y_2)$: --- $\vec{v_2} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$;
$P_3(x_3, y_3)$: --- $\vec{v_3} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j}$;

Produs scalar --- este un numar $\in R$

$$\vec{v_1}\,\vec{v_2} = \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j}\right)\left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j}\right) = \left|\vec{v_1}\right|\left|\vec{v_2}\right|\cos\left(\vec{v_1}, \vec{v_2}\right) = x_1 x_2 + y_1 y_2;$$

Produs vectorial --- este un tot un vector perpendic pe planul lui $\left(\vec{v_1}, \vec{v_2}\right)$
----- iar sensul cu regula burghiului iar modulul este = cu aria paralelogramului

$$\left|\vec{v_1} \times \vec{v_2}\right| = \left|\vec{v_1}\right|\left|\vec{v_2}\right|\sin\left(\vec{v_1}, \vec{v_2}\right)$$

--- simbolic -- in spatiu avem

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ **--- versorii axelor OX, OY, OZ -- in spatiu**

$\vec{v_n} = x_n\vec{i} + y_n\vec{j} + z_n\vec{k}$; --- $n = \{1, 2, 3\}$;

$$\vec{v_1} \times \vec{v_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \text{ (dezvoltare determinant)}$$

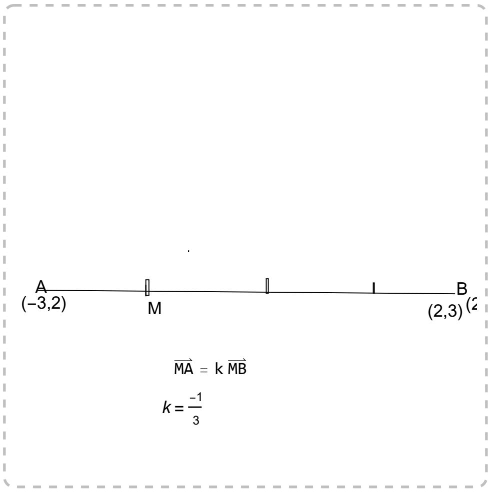
--- $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ --- **sunt ortogonali (perpendiculari) daca** -- $\vec{v_1}\,\vec{v_2} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$;

--- $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ --- **sunt paraleli (coliniari) daca** $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2}$;

Exemplu 1 --------Fie punctele A(-3,2) si B(2,3). Sa se calc coord punctului $M(x_M, y_M)$ astfel ca

$\overrightarrow{MA} = k\,\overrightarrow{MB}$, $k \in R\backslash\{0, 1\}$

$$M(x_M, y_M) = M\left(\frac{x_A - k\,x_B}{1 - k}, \frac{y_A - k\,y_B}{1 - k}\right)$$



Dem :

$\overrightarrow{MA} = k\,\overrightarrow{MB}$, $k \in R\setminus\{0, 1\}$

$(x_A - x_M)\,\vec{i} + (y_A - y_M)\,\vec{j} = k\,(x_B - x_M)\,\vec{i} + k\,(y_B - y_M)\,\vec{j}$

$(x_A - x_M) = k\,(x_B - x_M)$

$x_A - x_M = k\,x_B - k\,x_M$

$x_A - k\,x_B = x_M - k x_M$

$x_M = \frac{x_A - k\,x_B}{1 - k}$ ----- **analog pt** ----- y_M

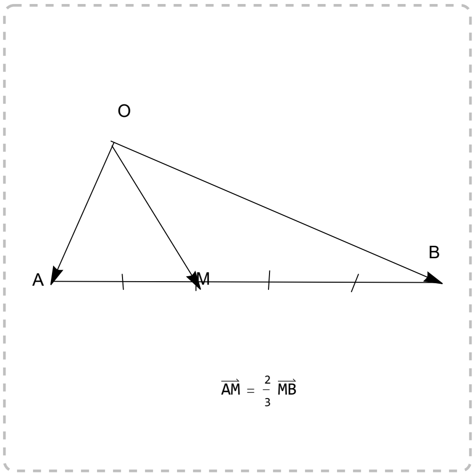
Exemplu 2 --------Punctul M imparte segmentul AB in raportul k astfel ca $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{MB}$, $k \in R\setminus\{-1\}$
Atunci pt orice punct din plan $O(x_O, y_O)$ -- $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+k}\left(\overrightarrow{OA} + k\,\overrightarrow{OB}\right)$

$\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{MB}$, $k \in R\setminus\{-1\}$

$k = \frac{AM}{MB}$;

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1 + k}\left(\overrightarrow{OA} + k\,\overrightarrow{OB}\right)$

Exemplu --- Sa se exprime vectorii $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}$ cu ajutorul vect ---- $\overrightarrow{OA}$, $\overline{OB}$, stiind ca --- $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{MB}$



$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MB}$

$k = \frac{2}{3}$; $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+k}\left(\overrightarrow{OA} + k\,\overrightarrow{OB}\right) = \frac{3}{5}\left(\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{5}\left(3\,\overrightarrow{OA} + 2\,\overrightarrow{OB}\right)$

OBS : Orice vector din planul real poate fi exprimat –

– ca o combinatie liniara a versorilor $\vec{i}$ si $\vec{j}$

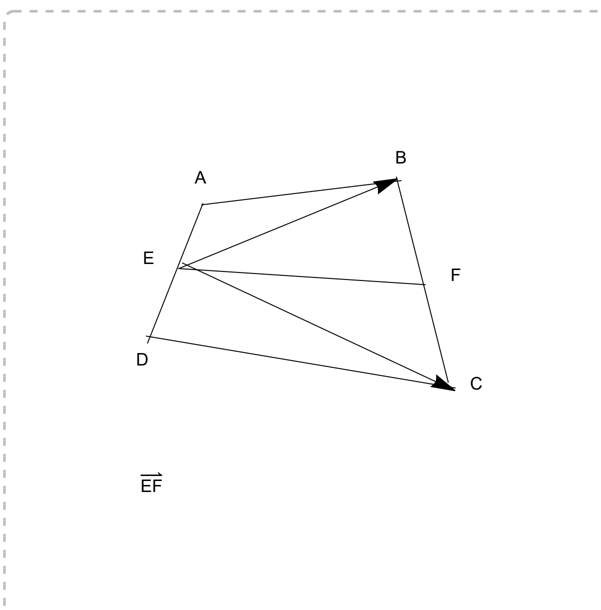
O (0, 0) ; A (x_A, y_A) ;

$\overrightarrow{OA} = \vec{v}\,(x_A - x_O,\ y_A - y_O) = (x_A - x_O)\,\vec{i} + (y_A - y_O)\,\vec{j}$

Exemplu -------

Fie un patrulater convex (paralelogram, patrat, dreptunghi, romb, trapez)

E, F – – – mijlocul lui AD, BC



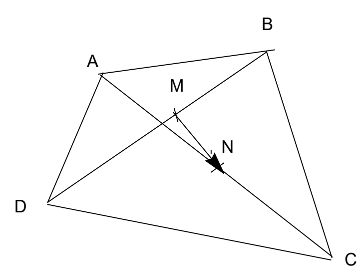
$\overrightarrow{EF} = \frac{\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC}}{2}$;

Dem : $\overrightarrow{EF} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}}{2}$

Exemplu -------

Fie un patrulater convex (paralelogram, patrat, dreptunghi, romb, trapez)

M, N--- mijlocul diagonalelor



$\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD}}{2} = \frac{\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB}}{2}$

Exemplu -------

Fie A, B, C -- 3 puncte in plan

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

Exemplu -------

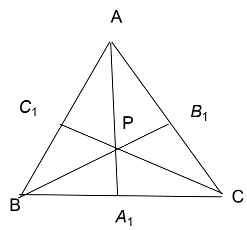
Fie --- ABC triunghi echilateral

a) $|\overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{PC}| = \frac{2}{3}\left|\overrightarrow{AA_1}\right|$;

$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$

b) $|\overrightarrow{PA_1}| = |\overrightarrow{PB_1}| = |\overrightarrow{PC_1}| = \frac{1}{3}\left|\overrightarrow{AA_1}\right|$;

$\overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PB_1} + \overrightarrow{PC_1} = \vec{0}$



Descompunerea unui vector dupa 2 directii date (dupa 2 vectori necoliniari)

$\vec{v} = a\,\vec{v_1} + b\,\vec{v_2}$; --- vectorul $\vec{v}$ este o combin liniara a vectorilor $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$

Vectori liniari dependenti

$a\,\vec{v_1} + b\,\vec{v_2} = \vec{0}$; --- numai daca -- - $a, b \neq 0$

Vectori liniari independenti

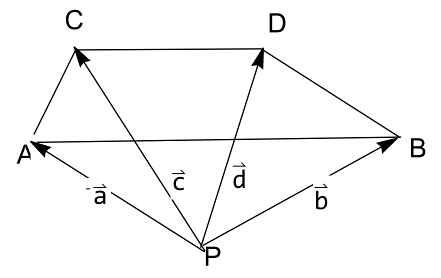
$a\,\vec{v_1} + b\,\vec{v_2} = \vec{0}$; ---- numai daca -- $a = b = 0$;

Problema 1 -----------P -- un punct oarecare din planul trapezului

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$

ABDC -- - trapez oarecare

$\overrightarrow{PB} = \vec{b} = ?$ --- in fc de vectorii -- - $\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}$



Rezolvare : $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PD}$; --- scaderea vectorilor $\left(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA};\ \text{-- unde } O\ (0,\ 0)\right)$

In $\triangle$ PAB : $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PA} + k\,\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{PA} + k\left(\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PD}\right)$

$\vec{b} = \vec{a} + k\left(\vec{c} - \vec{d}\right);$

Problema 2 ----------Fie segmentul AB si punctele E,F --- $\overline{AE} = \frac{1}{2}\ \overline{EB}$

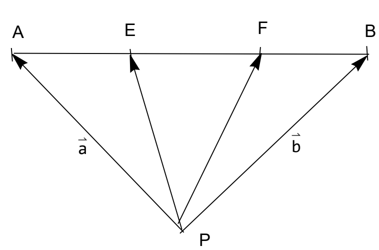
$\overrightarrow{PA} = \vec{a};$

$\overrightarrow{PB} = \vec{b};$

$\overrightarrow{PE} = ? = f\left(\vec{a},\ \vec{b}\right)$

$\overrightarrow{PF} = ? = f\left(\vec{a},\ \vec{b}\right)$

Sa se descompuna vectorii $\overrightarrow{PE}$, $\overrightarrow{PF}$ dupa directiile --- $\vec{a}$, $\vec{b}$



Rezolvare :

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EB}$

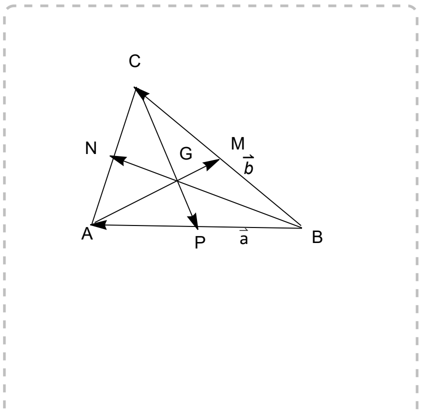
ΔPAB --- avem $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$;

ΔPAE --- avem $\overrightarrow{PE} = \vec{a} + \overrightarrow{AE} = \vec{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \frac{1}{3}\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$;

ΔPBF --- avem $\overrightarrow{PF} = \vec{b} + \overrightarrow{BF} = \vec{b} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \frac{1}{3}\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$;

Problema 3 ----------AM,BN,CP---mediane in ΔABC

a) Descompuneti $\overrightarrow{BN}$ dupa directiile vectorilor $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$ si $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$



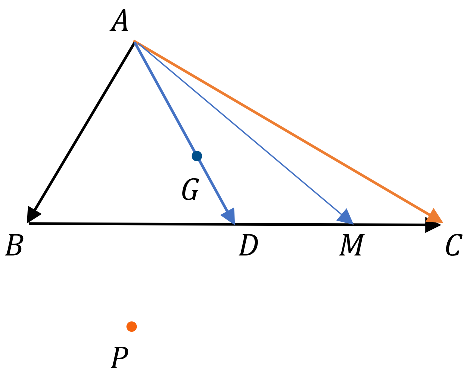
$\overrightarrow{BN} = \vec{b} + \overrightarrow{CN} = \vec{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \vec{b} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}\right) = \vec{b} + \frac{1}{2}\left(-\vec{b} + \vec{a}\right)$;

b) Descompuneti $\overrightarrow{AM}$ dupa directiile vectorilor $\overrightarrow{BN}$ si $\overrightarrow{CP}$

$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$; (AM, BN, CP --- mediane in ΔABC --- G -- centrul de greutate)

$\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{BN} - \overrightarrow{CP}$;

Relații vectoriale în triunghi



În triunghiul ABC avem relațiile:

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

3) $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$, unde D este mijlocul laturii BC a triunghiului ABC

4) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, unde G este centrul de greutate al triunghiului ABC

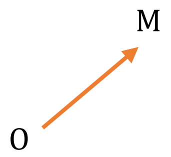
5) Dacă $\frac{\overrightarrow{BM}}{\overrightarrow{MC}} = k \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, atunci $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AC}$

6) $\overrightarrow{PG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}\right)$, unde $P \in \mathcal{P}$ și G este centrul de greutate al triunghiului ABC

Vectorul de poziţie al unui punct

1. Vectorul de poziţie al punctului M

Considerăm punctul O fixat în plan, atunci vectorul $\overrightarrow{OM}$ se numește vectorul de poziție al punctului M.

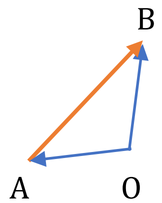


$\vec{r}_M = \overrightarrow{OM}$

2. Exprimarea vectorului $\overrightarrow{AB}$ cu ajutorul vectorilor de poziţie

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$

$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$



3. Vectorul de poziţie al punctului care împarte un segment într-un raport dat

Fie $M \in (AB)$, unde $\frac{AM}{MB} = k > 0 \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{MB} \quad \Longrightarrow$

$\vec{r}_M - \vec{r}_A = k \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_M) \quad \Longrightarrow \quad (1 + k) \cdot \vec{r}_M = \vec{r}_A + k \cdot \vec{r}_B \quad \Longrightarrow$

$$\vec{r}_M = \frac{1}{1+k} \cdot \vec{r}_A + \frac{k}{1+k} \cdot \vec{r}_B$$

Observație. Pentru $k = 1$, M este mijlocul segmentului AB și $\vec{r}_M = \frac{1}{2} \cdot \vec{r}_A + \frac{1}{2} \cdot \vec{r}_B$.

4. Condiţia de coliniaritate a trei puncte

Punctele A, M și B sunt coliniare dacă $\overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{MB}$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \iff$

$\vec{r}_M = \frac{1}{1+k} \cdot \vec{r}_A + \frac{k}{1+k} \cdot \vec{r}_B$. Notăm $\frac{1}{1+k} = x$, $\frac{k}{1+k} = y$ și relația anterioară devine

$\vec{r}_M = x \cdot \vec{r}_A + y \cdot \vec{r}_B$, unde $x + y = 1$, $x, y \in \mathbb{R}$.

5. Condiţia ca un patrulater convex să fie paralelogram

Un patrulater convex este paralelogram $\iff$ diagonalele se înjumătățesc.

$ABCD$ este paralelogram $\iff \vec{r}_A + \vec{r}_C = \vec{r}_B + \vec{r}_D$

6. Vectorul de poziție al centrului de greutate al unui triunghi

G este centrul de greutate al triunghiului ABC $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Determinăm vectorul de poziție al punctului G:

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{r}_A-\vec{r}_G+\vec{r}_B-\vec{r}_G+\vec{r}_C-\vec{r}_G=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{r}_G=\frac{1}{3}(\vec{r}_A+\vec{r}_B+\vec{r}_C)$$

7. Vectorul de poziție al centrului cercului înscris în triunghi

Vectorul de poziție al punctului I de intersecție al bisectoarelor interioare ale unui triunghi ABC este $\vec{r}_I=\frac{a}{a+b+c}\cdot\vec{r}_A+\frac{b}{a+b+c}\cdot\vec{r}_B+\frac{c}{a+b+c}\cdot\vec{r}_C$, unde a,b,c reprezintă lungimile laturilor BC,CA,AB.

8. Vectorul de poziție al centrului cercului circumscris unui triunghi

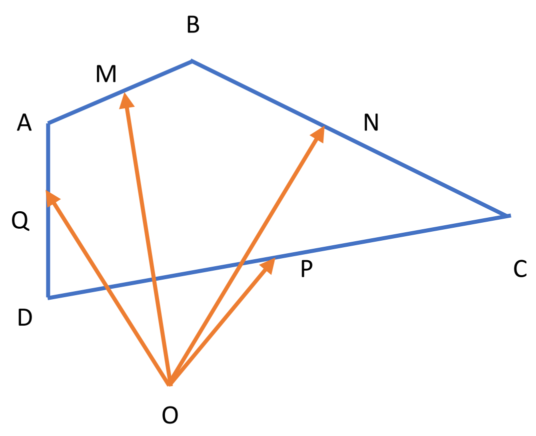
Pornim de la Relația lui Sylvester: $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\cdot\overrightarrow{HO}$, unde O este centrul cercului circumscris, iar H este ortocentrul triunghiului ABC. Relația devine $\vec{r}_A+\vec{r}_B+\vec{r}_C=2\cdot\vec{r}_O$.

9. Vectorul de poziție al ortocentrului unui triunghi

Pornim de la Relația lui Sylvester: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$, unde O este centrul cercului circumscris, iar H este ortocentrul triunghiului ABC. Relația devine $\vec{r}_A+\vec{r}_B+\vec{r}_C=\vec{r}_H$.

10. Aplicație

Fie M,N,P,Q mijloacele laturilor patrulaterului convex $ABCD$ și O un punct din plan. Arătați că $\vec{r}_M+\vec{r}_P=\vec{r}_N+\vec{r}_Q$.



M este mijlocul segmentului AB și $\vec{r}_M = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_B}{2}$

N este mijlocul segmentului BC și $\vec{r}_N = \frac{\vec{r}_B + \vec{r}_C}{2}$

P este mijlocul segmentului CD și $\vec{r}_P = \frac{\vec{r}_C + \vec{r}_D}{2}$

Q este mijlocul segmentului DA și $\vec{r}_Q = \frac{\vec{r}_D + \vec{r}_A}{2}$

Obținem că $\vec{r}_M + \vec{r}_P = \vec{r}_N + \vec{r}_Q$.

I. Propoziţie. *Să se arate că în orice triunghi au loc relaţiile vectoriale:*

1) $\overrightarrow{m_a}\cdot\overrightarrow{i_a}=p(p-a)$ *şi analoagele,*

2) $\overrightarrow{m_a}\cdot\overrightarrow{h_a}=\dfrac{4S^2}{a^2}$ *şi analoagele,*

3) $\overrightarrow{i_a}\cdot\overrightarrow{h_a}=\dfrac{4S^2}{a^2}$ *şi analoagele,*

4) $\overrightarrow{m_a}\cdot\overrightarrow{a}=\dfrac{1}{2}(b^2+c^2)$ *şi analoagele.*

Vom demonstra mai întâi următoarele rezultate:

Lema 1. *Dacă ABC este un triunghi oarecare, $M\in(BC)$ şi $\dfrac{MB}{MC}=k$, atunci* $\overrightarrow{AM}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}}{1+k}$.

Demonstraţie. Din $\dfrac{MB}{MC}=k$ rezultă că $\overrightarrow{BM}=k\overrightarrow{MC}$, deci $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}=k(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC})$, de unde $\overrightarrow{AM}-k\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{BA}+k\overrightarrow{AC}$ sau $\overrightarrow{AM}+k\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}$ şi, prin urmare, $\overrightarrow{AM}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}}{1+k}$.

Lema 2. *În orice triunghi sunt adevărate relaţiile:*

5) $\overrightarrow{m_a}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$ *şi analoagele,*

6) $\overrightarrow{i_a}=\dfrac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{b+c}$ *şi analoagele,*

7) $\overrightarrow{h_a}=\dfrac{b\cos C\cdot\overrightarrow{AB}+c\cos B\cdot\overrightarrow{AC}}{b\cos C+c\cos B}=\dfrac{b\cos C\cdot\overrightarrow{AB}+c\cos B\cdot\overrightarrow{AC}}{a}$ *şi analoagele.*

Demonstraţie. Aceste relaţii se obţin aplicând Lema 1 şi ţinând seama de faptul că avem $k=1$ pentru mediană, $k=\dfrac{c}{b}$ pentru bisectoare şi $k=\dfrac{c\cos B}{b\cos C}$ pentru înălţime (evident, toate trei corespunzătoare laturii a).

[1]Profesor, Bucureşti; e-mail: *marc.chirita@yahoo.ro*

Demonstraţia Propoziţiei. 1) Ţinând seama de 5) şi 6), avem:

$$\overrightarrow{m_a}\cdot\overrightarrow{i_a}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}\cdot\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{b+c}=\frac{bc^2}{2(b+c)}+\frac{cb^2}{2(b+c)}+\left[\frac{c}{2(b+c)}+\frac{b}{2(b+c)}\right]\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{bc}{2}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(b^2+c^2-a^2\right)\right]=\frac{1}{4}\left[(b+c)^2-a^2\right]=p(p-a).$$

2) Cu relaţiile 5) şi 7) obţinem:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{m_a}\cdot\overrightarrow{h_a}&=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}\cdot\frac{b\cos C\cdot\overrightarrow{AB}+c\cos B\cdot\overrightarrow{AC}}{a}=\\&=\frac{bc^2\cos C+b^2c\cos B}{2a}+\left(\frac{c\cos B+b\cos C}{2a}\right)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\\&=\frac{bc}{2a}\left(c\cos C+b\cos B\right)+\frac{1}{4}\left(b^2+c^2-a^2\right)=\\&=\frac{bc}{2a}\left(c\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+b\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)+\frac{1}{4}\left(b^2+c^2-a^2\right)\\&=\frac{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}{4a^2}=\frac{4S^2}{a^2}\end{aligned}$$

(în ultimul pas s-a folosit formula lui Heron pentru aria triunghiului în forma $16S^2=2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4$).

3) Procedăm la fel. Utilizând relaţiile 6) şi 7), avem:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{i_a}\cdot\overrightarrow{h_a}&=\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{b+c}\cdot\frac{b\cos C\cdot\overrightarrow{AB}+c\cos B\cdot\overrightarrow{AC}}{a}=\\&=\frac{1}{a\left(b+c\right)}\left[b^2c^2\left(\cos C+\cos B\right)+bc\left(\cos C+\cos B\right)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right]=\\&=\frac{bc\left(\cos C+\cos B\right)}{2a\left(b+c\right)}\left(2bc+b^2+c^2-a^2\right).\end{aligned}$$

Înlocuind $\cos C$, $\cos B$ cu expresiile lor date de teorema cosinusului, după calcule de rutină obţinem că

$$\overrightarrow{i_a}\cdot\overrightarrow{h_a}=\frac{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}{4a^2}=\frac{16S^2}{4a^2}=\frac{4S^2}{a^2},$$

de unde rezultă relaţia cerută.

4) Avem:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{m_a}\cdot\overrightarrow{a}&=m_a\cdot a\cdot\cos\left(\overrightarrow{m_a}\ ,\ \overrightarrow{a}\right)=m_a\cdot a\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}a\right)^2+m_a^2-b^2}{m_a\cdot a}=\\&=\frac{1}{4}\left(a^2+4m_a^2-4b^2\right)=\frac{1}{2}(b^2+c^2).\end{aligned}$$

II. Din Propoziţia stabilită, prin sumare, obţinem direct următoarele identităţi vectoriale:

(1) $$\overrightarrow{m_a}\cdot\overrightarrow{i_a}+\overrightarrow{m_b}\cdot\overrightarrow{i_b}+\overrightarrow{m_c}\cdot\overrightarrow{i_c}=p^2,$$

(2) $$\overrightarrow{m_a}\cdot\overrightarrow{h_a}+\overrightarrow{m_b}\cdot\overrightarrow{h_b}+\overrightarrow{m_c}\cdot\overrightarrow{h_c}=4S^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right),$$

(3) $$\overrightarrow{i_a}\cdot\overrightarrow{h_a}+\overrightarrow{i_b}\cdot\overrightarrow{h_b}+\overrightarrow{i_c}\cdot\overrightarrow{h_c}=4S^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right),$$

(4) $$\overrightarrow{m_a}\cdot\overrightarrow{a}+\overrightarrow{m_b}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{m_c}\cdot\overrightarrow{c}=a^2+b^2+c^2.$$

Identităţile vectoriale precedente pot fi utilizate pentru a obţine inegalităţi interesante relativ la triunghiuri. Astfel, pornind de la (1), prin utilizarea inegalităţii triunghiulare se obţine:

$$p^2=\left|\overrightarrow{m_a}\cdot\overrightarrow{i_a}+\overrightarrow{m_b}\cdot\overrightarrow{i_b}+\overrightarrow{m_c}\cdot\overrightarrow{i_c}\right|\le\left|\overrightarrow{m_a}\cdot\overrightarrow{i_a}\right|+\left|\overrightarrow{m_b}\cdot\overrightarrow{i_b}\right|+\left|\overrightarrow{m_c}\cdot\overrightarrow{i_c}\right|\le$$
$$\le m_a\cdot i_a+m_b\cdot i_b+m_c\cdot i_c,$$

deci

(5) $$p^2\le m_a\cdot i_a+m_b\cdot i_b+m_c\cdot i_c.$$

Pe de altă parte, din $\overrightarrow{m_a}\cdot\overrightarrow{i_a}=p(p-a)$ urmează că

$$p(p-a)\le m_a\cdot i_a\le\left(\frac{m_a+i_a}{2}\right)^2,$$

deci

$$m_a+i_a\ge 2\sqrt{p(p-a)}.$$

Sumând aceasta cu analoagele ei, se obţine că

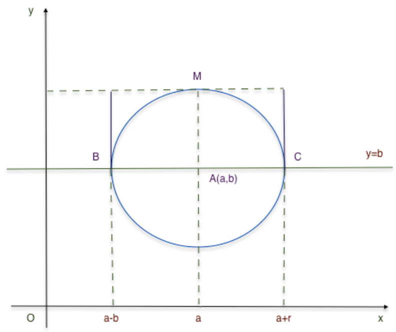
(6) $$m_a+i_a+m_b+i_b+m_c+i_c\ge 2\left(\sqrt{p(p-a)}+\sqrt{p(p-b)}+\sqrt{p(p-c)}\right)$$

sau, aplicând membrului drept inegalitatea mediilor,

(7) $$m_a+i_a+m_b+i_b+m_c+i_c\ge 6\sqrt[3]{pS}.$$

CONICE

Cercul -- centrul A (a, b) --- raza = r



---- ec cercului ----

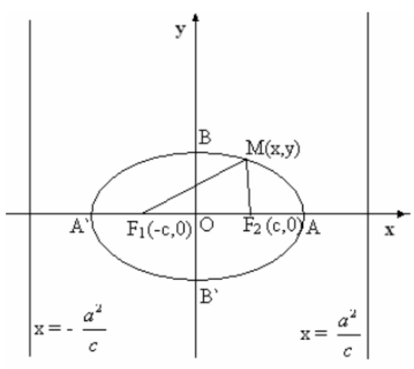
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2;$

--- functia cerc --- $f(x) = \pm\sqrt{r^2 - (x - a)^2} + b;$

--- ec tangentei la cerc in $M(x_0, y_0) \in$ circumferinta

$(x - a)(x_0 - a) + (y - b)(y_0 - b) = r^2;$

Elipsa -- focare $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$; $B(0, b)$; $B'(0, -b)$; $A(a, 0)$; $A'(-a, 0)$;



$x \in [-a, a]$ --- $a > b$

$y \in [-b, b]$

--- ec elipsei --

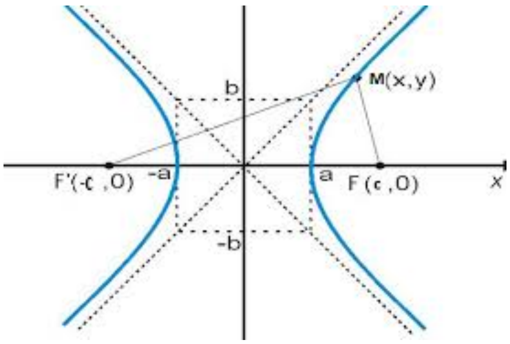
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$

--- functia elipsa --- $f(x) = \pm\sqrt{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)};$

--- ec tangentei la elipsa in $M(x_0, y_0) \in$ circumferinta

$$\frac{x\,x_0}{a^2} + \frac{y\,y_0}{b^2} - 1 = 0;$$

Hiperbola -- focare F, F ' -- asimptote verticale simetrice -- y = $\frac{-b}{a}$ x; y = $\frac{b}{a}$ x;



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

--- functia hiperbola --- $f(x) = \pm\sqrt{b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)}$;

--- ec tangentei la hiperbola in M $(x_0, y_0) \in$ circumferinta

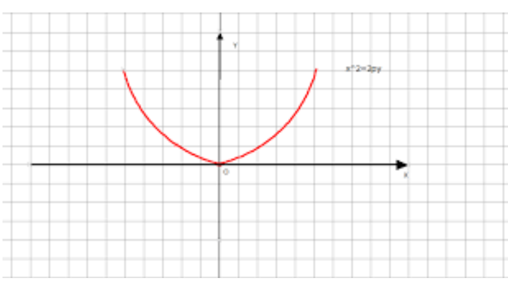
$$\frac{x\,x_0}{a^2} - \frac{y\,y_0}{b^2} - 1 = 0;$$

Parabola cu axa de simetrie axa -- - OY

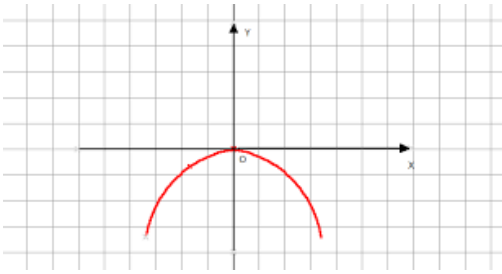
$x^2 = 2\,p\,y$

$$y = f(x) = \frac{x^2}{2\,p}$$

$p > 0$



$p < 0$



--- ec tangentei la parabola cu axa de simetrie axa OY -- in M $(x_0, y_0) \in$ circumferinta

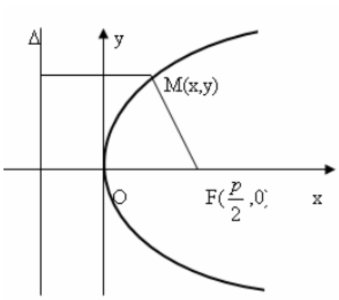
$x x_0 = p (y + y_0)$

Parabola cu axa de simetrie axa --- OX

$y^2 = 2 p x$

$y = f(x) = \pm \sqrt{2 p x}$

$p > 0$



$p < 0$ --- parabola va fi cu ramurile spre stanga -- graficul este similar

--- ec tangentei la parabola -- OX -- in M $(x_0, y_0) \in$ circumferinta este :

$y y_0 = p (x - x_0)$

TRIGONOMETRIE

Ecuatii Trigonometrice

Exemplu 1 ---------

$\sin(x) = -1$

$x = (-1)^k \arcsin(-1) + k\pi = (-1)^k \left(\frac{-\pi}{2}\right) + k\pi$

Cazul 1 -----

k = 2 s ---- k = par

$x_1 = \frac{-\pi}{2} + 2 s\pi = \frac{-\pi}{2} + 2 s\pi + T - T = \frac{-\pi}{2} + 2 s\pi + 2\pi - 2\pi = \frac{3\pi}{2} + 2(s-1)\pi = \frac{3\pi}{2} + 2 l \pi$

Cazul 2 -----

k = 2 s + 1 -- -- k = impar

$x_2 = \frac{\pi}{2} + (2 s + 1)\pi = \frac{\pi}{2} + 2 s\pi + \pi = \frac{3\pi}{2} + 2 s\pi$

--- deci solutia generala este --- $x = \frac{3\pi}{2} + 2 k\pi$

$\text{arsin}(x) + \text{arcos}(x) = \frac{\pi}{2}$ -- oricare $x \in [-1, 1]$ ---;

$\text{arctg}(x) + \text{arcctg}(x) = \frac{\pi}{2}$ -- oricare $x \in R$;

$\text{arctg}(x) + \text{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ -- oricare $x > 0$; $\text{arcctg}(x) + \text{arcctg}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ --- oricare $x > 0$;

$\text{arctg}(x) + \text{arcctg}(y) = \text{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$; -----oricare-- $xy \neq 1$

$\text{arctg}(x) - \text{arcctg}(y) = \text{arctg}\frac{x-y}{1+xy}$; --oricare -- $xy \neq -1$

Exemplu 1 ----- Sa se rez in R ecuatia:

$\sin(5x) = \sin(3x)$

Metoda 1 :

$5x = (-1)^k \arcsin(\sin(3x)) + k\pi$

Metoda 2 : dezvoltam dupa k par si impar

a) pt - k par -- k = 2 p -- unde $p \in Z$

$5x = \arcsin(\sin(3x)) + 2p\pi = 3x + 2p\pi$; $2x = 2p\pi$;

$x_p = p\pi$; $p \in Z$

b) pt --- $k = 2l + 1$ -- unde $l \in Z$

$5x = -\arcsin(\sin(3x)) + (2l+1)\pi = -3x + (2l+1)\pi$

$x_1 = \frac{(2l+1)\pi}{8}$; $l \in Z$

Final : $x \in \{p\pi \; / \; p \in Z\} \bigcup \left\{(2l+1)\frac{\pi}{8} \Big/ \; l \in Z\right\}$;

OBS : pentru solutii comune - uneori adaugam sau scadem perioada (in cazul nostru 2π)

Exemplu 2----- Sa se rez in R ecuatia:----$\sin(3x+2) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$3x + 2 = (-1)^k \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + k\pi$; $3x + 2 = (-1)^k \frac{\pi}{3} + k\pi$;

$x = (-1)^k (3k+1)\frac{\pi}{9} - \frac{2}{3}$;

a) $k = 2p$ --- $x_p = (6p+1)\frac{\pi}{9} - \frac{2}{3}$; $p \in Z$

b) $k = 2l + 1$ --- $x_1 = -(6l+4)\frac{\pi}{9} - \frac{2}{3}$; $l \in Z$

$x \in x_p \bigcup x_1$;

Deducerea Formulelor Trigonometrice

Pornim de la urmatoarele 3 formule :

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$;

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$;

--- le deducem pe celelalte

Suma Unghiurilor

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ --- analogie -- $\sin(a+a) = \sin a \cos a + \sin a \cos a$

$\sin(a-b) = \sin(a + (-b))$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ --- analogie -- $\cos(a+a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a$

$\cos(a-b) = \cos(a + (-b))$

$$\text{tg}(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$$

$$\text{ctg}(a+b) = \frac{1}{\text{tg}(a+b)}$$

Jumatatea Unghiului

$$\cos a = 1 - 2\sin^2\frac{a}{2};\ \sin^2\frac{a}{2} = \frac{1-\cos a}{2};\ \sin^2\frac{a}{2} = \frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2\frac{a}{2}};\ \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2};$$

$$\cos a = 2\sin^2\frac{a}{2} - 1;\ \cos^2\frac{a}{2} = \frac{1+\cos a}{2};\ \cos^2\frac{a}{2} = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\frac{a}{2}};\ \cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2};$$

Substitutia Universala

$$\mathrm{tg}\frac{a}{2} = t;$$

$$\sin a = 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} = 2\frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}}\cos^2\frac{a}{2} = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{a}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{a}{2}} = \frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos a = \cos^2\frac{a}{2} - \sin^2\frac{a}{2} = \frac{\cos^2\frac{a}{2} - \sin^2\frac{a}{2}}{\cos^2\frac{a}{2}}\cos^2\frac{a}{2} = \left(1 - \mathrm{tg}^2\frac{a}{2}\right)\cos^2\frac{a}{2} = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{a}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{a}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$\mathrm{tg}\, a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{2t}{1-t^2};$$

Produse in Sume

$$(1)\quad \sin a \sin b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2} \text{ --- din -- } \begin{cases}\cos(a+b) & = \\ \cos(a-b) & = \end{cases}$$

$$(2)\quad \cos a \cos b = \frac{\cos(a-b) + \cos(a+b)}{2} \text{ --- din -- } \begin{cases}\cos(a+b) & = \\ \cos(a-b) & = \end{cases}$$

$$(3)\quad \sin a \cos b = \frac{\sin(a-b) + \sin(a+b)}{2} \text{ --- din -- } \begin{cases}\sin(a+b) & = \\ \sin(a-b) & = \end{cases}$$

$$\mathrm{tg}\, a\, \mathrm{tg}\, b = \frac{\sin a}{\cos a}\frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b} = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{\cos(a-b) + \cos(a+b)};$$

Sume in Produse

-folosim produsele (1), (2), (3)

$$(4)\quad \begin{cases} a+b & = A; \\ a-b & = B; \end{cases} \quad a = \frac{A+B}{2};\ b = \frac{A-B}{2}$$

din (3) : $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a\cos b$ -- si din (4) -- $\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2};$

din (2) : $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a\cos b$ -- si din (4) -- $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2};$

din (1) : $\cos(a+b) - \sin(a-b) =$

$-2\sin a\sin b$ -- si din (4) -- $\cos A - \sin B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A+B}{2};$

Permutari – Inversiuni – Inversa Permutarii – Semnul permutarii

---compunerea permutarilor este asociativa si necomutativa

$\sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) & \sigma(5) & \sigma(6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6 \\ 2&4&5&3&6&1 \end{pmatrix}$; -- in cazul nostru -- $\sigma(1) = 2$

---fie 2 perm de ord 6 -- σ_6, β_6--- si permutarea identica de ord 6--- e_6

$\sigma_6 = \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6 \\ 2&4&5&3&6&1 \end{pmatrix}$; $\beta_6 = \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6 \\ 5&3&6&1&2&4 \end{pmatrix}$; $e_6 = \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6 \\ 1&2&3&4&5&6 \end{pmatrix}$;

Compunerea permutarilor ----

$\sigma_6 \circ \beta_6(1) = \sigma_6(\beta_6(1)) = \sigma_6(5) = 6$;

$\sigma_6 \circ \beta_6 = \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6 \\ 2&4&5&3&6&1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6 \\ 5&3&6&1&2&4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6 \\ 6&5&1&2&4&3 \end{pmatrix}$;

Inversa unei permutari ----

$\sigma_6 = \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6 \\ 2&4&5&3&6&1 \end{pmatrix}$; -- pt inversa se merge de jos in sus la -- $1 \to 6$, $2 \to 1$ etc

$\sigma_6^{-1} = \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6 \\ 6&1&4&2&3&5 \end{pmatrix}$; --verificare-- $\sigma_6 \circ \sigma_6^{-1} = \sigma_6^{-1} \circ \sigma_6 = e_6$;

Inversiune a unei permutari ---- $i < j$ -- $\sigma_6(i) > \sigma_6(j)$

$m(\sigma_6)$ = nr inversiunilor unei permutari

Semnul (signatura) unei permutari

$\sigma_6 = \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6 \\ 2&4&5&3&6&1 \end{pmatrix}$; $\begin{cases} 1<2 \quad 2>4 - \text{fals} -- \text{etc} - \; 1<6 -- \times \; 2>1 \text{ True} \\ 2<3 \quad 4>5 - \text{fals} -- \text{etc} - \; 2<6 -- \times \; 4>1 \text{ True} \end{cases}$

--avem 7 inversiuni--- deci σ_6 -- permutare impara

$\epsilon(\sigma_6) = (-1)^{m(\sigma_6)} = (-1)^7 = -1$ -- σ_6 -- permutare impara

----

--fie -- σ, β-- 2 permutari oarecare

σ -- permutare para daca -- $\epsilon(\sigma) = +1$ --- nr permutarilor pare $= \frac{n!}{2}$

σ -- permutare impara daca -- $\epsilon(\sigma) = -1$----- nr permutarilor impare $= \frac{n!}{2}$

--proprietati---

$\epsilon(\sigma\beta) = \epsilon(\sigma)\,\epsilon(\beta)$

$\epsilon(\sigma^n) = (\epsilon(\sigma))^n$

Calculul σ_6^n

-- compunem σ_6 o σ_6 pana ne da $\sigma_6{}^k = e_6$ -- apoi -- folosim $e_6{}^k = e_6$

Transpozitia (ij) a unei permutari oarecare σ--- nr transpozitiilor = $C_n{}^2$

$$(ij) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots i & \ldots j & \ldots n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots j & \ldots i & \ldots n \end{pmatrix};$$

---propr ale transpoz ---

$(ij) = (ji)$

$(ij)^2 = e$

$(ij)^{-1} = (ij)$

$\epsilon\,(ij) = -1$ --- transp este o perm impara

---sa se scrie permutarea σ_6 ca un produs de transpozitii

$$\sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix};$$

Matrice Determinanti

Generalitati :

Urma unei matrice --- suma elem de pe diag princ = tr A

Proprietate -- $\alpha \in R$ -- $tr[\alpha A] = \alpha\, tr[A]$;

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};$$

$tr A = a + d$; $\det(A) = a d - b c$

$A^2 - (tr A) A + \det A\, I_2 = O_2$

---ex ------

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix};$$

$A^2 - (tr A) A + \det A\, I_2 = O_2 \mid (tr)$

$tr\left(A^2\right) - tr[(tr A) A] + tr(\det A\, I_2) = tr(O_2)$

$tr[(tr A) A] = ?$ --- notam ---$trA = \alpha$

$tr[(tr A) A] = tr[\alpha A] = \alpha\, tr[A] = \alpha^2 = (tr A)^2$

--Toate matricele patratice au proprietatea de asociativitate fata de adunare si inmultire

$(A + B) + C = A + (B + C)$; $(A * B) * C = A * (B * C)$;

$tr(AB - BA) = 0$;

$\det(A B) = \det A \det B$

$\det\left(A^n\right) = (\det(A))^n$

$\det(a A_n) = a^n \det(A_n)$; ---- n – ordinul matricei patratice A

$A^{-1} A = A A^{-1} = I_n$

Formule importante

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$;

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2} & \frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2} \\ \frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2} & \frac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2} \end{pmatrix};$$

Exemplu ----- Sa se rez ec matriciala

$X^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

Rezolvare --- n = 3; A = X;

$$\begin{cases} \frac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2} = 2 \\ \frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2} = 1 \end{cases} \text{ --- rezulta ---- } a = \frac{1+\sqrt{3}}{2};\ b = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{3+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3+\sqrt{3}}{2} & \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix};$$

Ecuatii matriceale

$A X = B$ | A^{-1} la stanga

$A^{-1} A X = A^{-1} B$

$I_n X = A^{-1} B$

$X = A^{-1} B$

$X A = B$ | A^{-1} la dreapta

$X A A^{-1} = B A^{-1}$

$X I_n = B A^{-1}$

$X = B A^{-1}$

$A X B = C$ | la stanga cu A^{-1} -- la dreapta cu B^{-1}

$X = A^{-1} C B^{-1}$

Relatia Cayley Hamilton

----- pt matrice patratice de ord 2

$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};$

$\text{tr}\,X = a + d;\ \det(X) = a\,d - b\,c$

$X^2 - (\text{tr}\,X)\,X + (\det X)\,I_2 = O_2$

----- pt matrice patratice de ord 3

$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix};\ \text{tr}\,X = 1 + 2 + 1 = 4;\ \det X = -20;$

S_X = suma minorilor (determinanti de ord 2) de pe diag principala

$X^3 - (\text{tr}\,X)\,X^2 + S_X\,X - (\det X)\,I_3 = O_3$

Calculul A^n pt matrice de ord 2

Met 1 –– Cayley – Hamilton

$A^2 - (\text{tr}\,A)\,A + \det A\,I_2 = O_2;$

a) -- caz 1 --- tr A = 0

$A^2 = -(\det A)\,I_2;$

b) -- caz 2 --- det A = 0

$A^2 = (\text{tr}\,A)\,I_2;$

c) - caz 3 --- tr A ≠ 0; det A ≠ 0;

==

Exemplu --------

Metoda 1

$\text{Fie}: X^2 = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix};\ X = ?$

$\text{tr}\left(X^2\right) = 13;$

$\det\left(X^2\right) = (\det X)^2 = 36;$

$\det X = \pm\sqrt{36} = \pm 6;$ ---- luam cele 2 cazuri ---- det X = -6 -- si -- det X = 6

----- det X = -6

$X^2 - (\text{tr}\,X)\,X + (\det X)\,I_2 = O_2;$ --- devine

$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} - (\text{tr}\,X)\,X - \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$ rezulta

$(\text{tr}\,X)\,X = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};\ \big|\ \text{tr}$

$tr[(tr X) X] = -2 + 3 = 1;$

$(tr X)^2 = 1; tr X = \pm 1$

$tr X = -1;$

$X^2 - (tr X) X + (det X) I_2 = O_2;$

$$X_1 = \frac{X^2 + det X I_2}{tr X} = \frac{1}{-1}\left(\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix};$$

$tr X = 1;$

$$X_2 = \frac{X^2 + det X I_2}{tr X} = \frac{1}{1}\left(\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};$$

--- pt det X = 6 --- analog -- inca 2 sol -- X_3, X_4

Metoda 2

Exemplu --- $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $A=\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$;

$X^2 = A$ | X - la stanga

$X^3 = X.A$

$X^2 = A$ | X - la dreapta

$X^3 = A.X$

--- deci --

X.A = A.X --- din aceasta ec scapam de 2 necunoscute -- rezulta c = 0; d = a - b; Rezulta :

$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$; --calculam apoi a, b, din --- **X.X = A**

Met 2 -- ec caracteristica

$x^2 - (tr A) x + det A = 0;$

--daca $x_1 = x_2$

$A^n = n x_1^{n-1} A - (det A)(n-1) x_1^{n-2} I_2;$

--daca $x_1 \neq x_2$

$$A^n = \frac{x_2^n - x_1^n}{x_2 - x_1} A - \frac{x_2^{n-1} - x_1^{n-1}}{x_2 - x_1} (det A) I_2;$$

Transpusa matricei. Proprietăţi

1.	$(A+B)^t = A^t + B^t$	$A, B \in M_2(\mathbb{C})$
2.	$(\alpha A)^t = \alpha A^t$	$A \in M_2(\mathbb{C}), \alpha \in \mathbb{C}^*$
3.	$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$	$A, B \in M_2(\mathbb{C})$

Urma matricei. Proprietăţi

1.	$Tr(A+B) = TrA + TrB$	$A, B \in M_2(\mathbb{C})$
2.	$Tr(\alpha A) = \alpha \cdot TrA$	$A \in M_2(\mathbb{C}), \alpha \in \mathbb{C}^*$
3.	$Tr(AB) = Tr(BA)$	$A, B \in M_2(\mathbb{C})$
4.	$TrA = TrA^t$	$A \in M_2(\mathbb{C})$
5.	$Tr(AB) \neq TrA \cdot TrB$	$A, B \in M_2(\mathbb{C})$

Determinantul de ordinul doi. Proprietăţi

1.	$det(AB) = detA \cdot detB$	$A, B \in M_2(\mathbb{C})$
2.	$det(A_1 A_2 \dots A_n) = detA_1 detA_2 \dots detA_n$	$A_i \in M_2(\mathbb{C}), i = \overline{1,n}, n \in \mathbb{N}^*$
3.	$det(A^n) = (detA)^n$	$A \in M_2(\mathbb{C}), n \in \mathbb{N}^*$
4.	$det(A^t) = detA$	$A \in M_2(\mathbb{C})$
5.	$det(\alpha A) = \alpha^2 detA$	$A \in M_2(\mathbb{C}), \alpha \in \mathbb{C}^*$

Dacă $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ sunt inversabile, atunci:

1.	$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$	
2.	$(\alpha A)^{-1} = \dfrac{1}{\alpha} A^{-1}$	$\alpha \in \mathbb{C}^*$
3.	$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$	
4.	$(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$	$n \in \mathbb{N}^*$

Dacă $AB = BA$, atunci:

1.	$A^m \cdot B^n = B^n \cdot A^m$	$A, B \in M_2(\mathbb{C}), m, n \in \mathbb{N}^*$
2.	$A^n - B^n = (A-B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \dots + AB^{n-2} + B^{n-1})$	$A, B \in M_2(\mathbb{C}), n \in \mathbb{N}^*$
3.	$A^{2n+1} + B^{2n+1} =$ $= (A+B)(A^{2n} - A^{2n-1}B + \dots - AB^{2n-1} + B^{2n})$	$A, B \in M_2(\mathbb{C}), n \in \mathbb{N}^*$
4.	$(A+B)^n = A^n + C_n^1 A^{n-1}B + \dots + C_n^{n-1} AB^{n-1} + B^n$	$A, B \in M_2(\mathbb{C}), n \in \mathbb{N}^*$

Funcţie polinomială de tip determinant

$f(x) = \det(A - xI_2) = x^2 - TrA \cdot x + detA$

Aplicaţie. Dacă $TrA = 2$ şi $detA = 3$, calculaţi
$det(A^2 - I_2) + det(A^2 + A) + det(A^2 + 3I_2)$, unde $A \in M_2(\mathbb{C})$.

Utilizând Teorema Hamilton-Cayley avem

$$A^2 - 2A + 3I_2 = O_2 \rightarrow \begin{cases} A^2 - I_2 = 2A - 4I_2 = 2(A - 2I_2) \\ A^2 + A = A(A + I_2) \\ A^2 + 3I_2 = 2A \end{cases},$$

şi $f(x) = \det(A - xI_2) = x^2 - 2x + 3$. Atunci

$$\begin{cases} det(A^2 - I_2) = det\big(2(A - 2I_2)\big) = 4 \cdot det(A - 2I_2) = 4 \cdot f(2) = 4 \cdot 3 = 12 \\ det(A^2 + A) = det\big(A(A + I_2)\big) = 3 \cdot det(A + I_2) = 3 \cdot f(-1) = 3 \cdot 6 = 18 \\ det(A^2 + 3I_2) = det(2A) = 4 \cdot detA = 4 \cdot 3 = 12 \end{cases}$$

$det(A^2 - I_2) + det(A^2 + A) + det(A^2 + 3I_2) = 42$

LEGI DE COMPOZITIE

Lege Interna (Lege bine definita) pe R --- (R, ∗)

--- daca oricare x, y ∈ R --- rezulta -- x ∗ y ∈ R

Exemplu 1   Fie x*y=(x-2)(y-2)+2   Sa se det a,b ∈ Q \ Z astfel incat a*b ∈ Z

x ∗ y = (x − 2) (y − 2) + 2

a ∗ b = (a − 2) (b − 2) + 2

− trebuie ca : a ∗ b ∈ Z, deci (a − 2) (b − 2) ∈ Z -- ex − luam -- $a - 2 = \frac{4}{5}$; $b - 2 = \frac{5}{4}$;

Parte Stabila

Exemplu 2
a) Fie x*y=(x-2)(y-2)+2   Sa se det x,y ∈ R-------------------------
Aratati ca H_1=(2,+∞) este parte stabila a lui R in raport cu legea"*"
Sa aratam ca oricare x,y ∈ H_1 rezulta x*y ∈ R

$$\begin{cases} x > 2 \\ y > 2 \end{cases} \text{-- rexulta --} \quad (x-2)(y-2) > 0 \; \Big| +2 \text{ --- rezulta } (x-2)(y-2) + 2 > +2$$

-- deci x ∗ y ∈ H1

b) Aratati ca H_2 =(1,3) este parte stabila a lui R in raport cu legea"*"
Sa aratam ca oricare x,y ∈ H_2 rezulta x*y ∈ H_2

$$\begin{cases} 1 < x < 3 \; | -2 \text{ − rezulta -- } -1 < x - 2 < 1 \text{ − rezulta -- − } |x - 2| < 1 \\ 1 < y < 3 \; | -2 \text{ − rez ulta -- } -1 < y - 2 < 1 \text{ − rezulta -- − } |y - 2| < 1 \end{cases}$$

$|x - 2| \, |y - 2| < 1$

$|(x - 2)(y - 2)| < 1$

$-1 < (x - 2)(y - 2) < 1 \; | +2$ -- rezulta -- --- $1 < (x - 2)(y - 2) + 2 < 3$ --- $x * y \in H_2$

OBS

Grupuri

(G, ∗) − sa fie grup -- daca un element din G nu are simetric -- rezulta -- nu avem grup

Se numeste ordinul grupului (G, ∗) = card G

Se numeste ordinul elementului x in grupul (G, ∗) =
cel mai mic -- n ∈ N -- cu proprietatea $x^n = e$

---Daca n = ord (G) = card G -- rezulta -- $x^n = e$ -- oricare -- x ∈ G

---Ordinul elementului divide ordinul grupului --- ord (x) | n

(S, ∗) --- subgrup --- daca

--- oricare -- z, w ∈ S --- rezulta -- $z w^{-1} \in S$

Exemplu --------a,b∈Q\Z=? --- astfel incat --- aob ∈ N

$$xoy = 7xy + x + y = 7\left(x+\frac{1}{7}\right)\left(y+\frac{1}{7}\right)-\frac{1}{7} = 7\,\frac{7x+1}{7}\,\frac{7y+1}{7}-\frac{1}{7} = \frac{(7x+1)(7y+1)}{7}-\frac{1}{7};$$

a, b ∈ Q\Z = ? --- astfel incat --- aob ∈ N

$$aob = \frac{(7a+1)(7b+1)}{7}-\frac{1}{7} = 1;$$ **--- de ex.-- am luat -- - 1 ∈ N**

$$(7a+1)(7b+1) = 8$$

$$\begin{cases} 7a+1 = 2 \\ 7b+1 = 4 \end{cases} --- \begin{cases} a = \frac{1}{7} \\ b = \frac{3}{7} \end{cases}$$

Inele

Inelul (R, ∗ , o) -- este inel fara divizori ai lui zero -- daca oricare x, y ≠ e_* -- rezulta -- xoy ≠ e_*

Inelul (A, + , .) -- - are divizori ai lui zero -- daca exista x, y ≠ 0 -- a.i. x.y = 0 rezulta -- x si y se numesc divizori ai lui zero

Inelul (R, ∗ , o) -- comutativ (cu monoid comutativ)
cu cel putin 2 elemente si fara div ai lui zero
este -- - inel integru -- (domeniu de integritate)

Proprietăți ale legii de compoziție

$$x * y = xy - ax - ay + a^2 + a$$

Proprietatea \ Legea	$x * y = xy - ax - ay + a^2 + a$	$x * y = xy - 6x - 6y + 42$
Restrângerea legii de compoziție	$x * y = (x - a)(y - a) + a$	$x * y = (x - 6)(y - 6) + 6$
$(G,*)$ este grup abelian/comutativ din proprietățile 1, 2, 3, 4, 5	$G = (a, \infty)$	$G = (6, \infty)$
1. Parte stabilă	$\forall x, y \in (a, \infty) \Rightarrow x * y \in (a, \infty)$	$\forall x, y \in (6, \infty) \Rightarrow x * y \in (6, \infty)$
2. Asociativitate $x * y * z =$ $(x * y) * z = x * (y * z)\, , \forall x, y, z \in G$	$(x - a)(y - a)(z - a) + a$	$(x - 6)(y - 6)(z - 6) + 6$
3. Element neutru $\exists e \in G, \forall x \in G, x * e = e * x = x$	$e = 1 + a$	$e = 7 \in (6, \infty)$
4. Elemente simetrizabile $\forall x \in G, \exists x' \in G, x * x' = x' * x = e$	$x' = \frac{1}{x - a} + a$	$x' = \frac{1}{x - 6} + 6 \in (6, \infty)$
5. Comutativitate	$x * y = y * x\, , \forall x, y \in G$	$x * y = y * x\, , \forall x, y \in (6, \infty)$
Element absorbant $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$x * a = a * x = a\, , \forall\, x \in \mathbb{R}$	$x * 6 = 6 * x = 6\, , \forall\, x \in \mathbb{R}$

Utilizări ale proprietăților:

$\forall x_i \in \mathbb{R}\, , a \in \mathbb{R}\, , i = \overline{1, n}\, , n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$ $x_1 * x_2 * x_3 * \dots * x_n =$ din asociativitate	$(x_1 - a)(x_2 - a) \dots (x_n - a) + a$	$(x_1 - 6)(x_2 - 6) \dots (x_n - 6) + 6$
$\underbrace{x * x * x * \dots * x}_{de\ n\ ori} =$ din asociativitate, $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$	$(x - a)^n + a$	$(x - 6)^n + 6$
elementul absorbant în compunere $a \in \mathbb{R}\, , n \in \mathbb{N}^*$	$x_1 * x_2 * \dots * a * \dots * x_n = a$	$x_1 * x_2 * \dots * 6 * \dots * x_n = 6$

Proprietăţi ale legii de compoziţie
$x * y = xy + ax + ay + a^2 - a$

Proprietatea \ Legea	$x * y = xy + ax + ay + a^2 - a$	$x * y = xy + 5x + 5y + 20$
Restrângerea legii de compoziție	$x * y = (x + a)(y + a) - a$	$x * y = (x + 5)(y + 5) - 5$
$(G,*)$ este grup abelian/comutativ din proprietățile 1, 2, 3, 4, 5	$G = (-a, \infty)$	$G = (-5, \infty)$
1. Parte stabilă	$\forall x, y \in (-a, \infty) \Rightarrow x * y \in (-a, \infty)$	$\forall x, y \in (-5, \infty) \Rightarrow x * y \in (-5, \infty)$
2. Asociativitate $x * y * z =$ $(x * y) * z = x * (y * z)\,, \forall x, y, z \in G$	$(x + a)(y + a)(z + a) - a$	$(x + 5)(y + 5)(z + 5) - 5$
3. Element neutru $\exists e \in G, \forall x \in G, x * e = e * x = x$	$e = 1 - a$	$e = -4 \in (-5, \infty)$
4. Elemente simetrizabile $\forall x \in G, \exists x' \in G, x * x' = x' * x = e$	$x' = \dfrac{1}{x + a} - a$	$x' = \dfrac{1}{x + 5} - 5 \in (-5, \infty)$
5. Comutativitate	$x * y = y * x\,, \forall x, y \in G$	$x * y = y * x\,, \forall x, y \in (-5, \infty)$
Element absorbant $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$x * (-a) = (-a) * x = -a\,, \forall x \in \mathbb{R}$	$x * (-5) = (-5) * x = -5\,, \forall x \in \mathbb{R}$

Utilizări ale proprietăților:

$\forall x_i \in \mathbb{R}\,, a \in \mathbb{R}\,, i = \overline{1, n}\,, n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$ $x_1 * x_2 * x_3 * \dots * x_n =$ din asociativitate	$(x_1 + a)(x_2 + a) \dots (x_n + a) - a$	$(x_1 + 5)(x_2 + 5) \dots (x_n + 5) - 5$
$\underbrace{x * x * x * \dots * x}_{de\ n\ ori} =$ din asociativitate, $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$	$(x + a)^n - a$	$(x + 5)^n - 5$
elementul absorbant în compunere $a \in \mathbb{R}\,, n \in \mathbb{N}^*$	$x_1 * x_2 * \dots * (-a) * \dots * x_n = -a$	$x_1 * x_2 * \dots * (-5) * \dots * x_n = -5$

inel, corp, izomorfism	
$A, K \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_n\}$	mulțimi nevide
$(A,+,\cdot)\begin{cases} A \neq \emptyset \\ (A,+) \text{ grup comutativ} \\ (A,\cdot) \text{ monoid} \\ \cdot \text{ este distributivă fața de } + \end{cases}$	inel
$(A,+,\cdot)\begin{cases} A \neq \emptyset \\ (A,+) \text{ grup comutativ} \\ (A,\cdot) \text{ monoid comutativ} \\ \cdot \text{ este distributivă fața de } + \end{cases}$	inel comutativ
$(U(A),\cdot)$	grupul elementelor inversabile din inelul A
$(K,+,\cdot)\begin{cases} \lvert K\rvert \geq 2 \\ (K,+) \text{ grup comutativ} \\ (K^*,\cdot) \text{ grup} \\ \cdot \text{ este distributivă fața de } + \end{cases}$	corp
$(K,+,\cdot)\begin{cases} \lvert K\rvert \geq 2 \\ (K,+) \text{ grup comutativ} \\ (K^*,\cdot) \text{ grup comutativ} \\ \cdot \text{ este distributivă fața de } + \end{cases}$	corp comutativ
$(A,+)\ PS, A, EN, ES$	grup
$(A,+)\ PS, A, EN, ES, C$	grup comutativ sau grup abelian
$(A,\cdot)\ PS, A, EN$	monoid
$(A,\cdot)\ PS, A, EN, C$	monoid comutativ
$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \forall x, y, z \in A$	distributivitate la stânga
$(y+z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x \quad \forall x, y, z \in A$	distributivitate la dreapta
$(A_1,+,\cdot), (A_2,*,\circ)$ două inele $f: A_1 \to A_2 \begin{cases} f(x+y) = f(x) * f(y), \forall x, y \in A_1 \\ f(xy) = f(x) \circ f(y), \forall x, y \in A_1 \end{cases}$	f se numește morfism de inele
$f: A_1 \to A_2 \begin{cases} f \text{ morfism de inele} \\ f \text{ funcție bijectivă} \end{cases}$	f se numește izomorfism de inele
$(A_1,+,\cdot) \simeq (A_2,*,\circ)$	inele izomorfe
$(K_1,+,\cdot), (K_2,*,\circ)$ două corpuri $f: K_1 \to K_2 \begin{cases} f(x+y) = f(x) * f(y), \forall x, y \in K_1 \\ f(xy) = f(x) \circ f(y), \forall x, y \in K_1 \end{cases}$	f se numește morfism de corpuri
$f: K_1 \to K_2 \begin{cases} f \text{ morfism de corpuri} \\ f \text{ funcție bijectivă} \end{cases}$	f se numește izomorfism de corpuri
$(K_1,+,\cdot) \simeq (K_2,*,\circ)$	corpuri izomorfe
$(\mathbb{Z}[i],+,\cdot) \quad \mathbb{Z}[i] = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{Z}, i^2 = -1\}$	inelul întregilor lui Gauss
$(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)\ n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	inelul claselor de resturi modulo n
$(\mathbb{Z}_p,+,\cdot)\ p$ număr prim, $p \in \mathbb{N}$	corpul claselor de resturi modulo n
$(\mathbb{Q}(\sqrt{d}),+,\cdot)\ d \in \mathbb{Z} - \{1\}$ întreg liber de pătrate	corp pătratic

Morfism şi izomorfism de grupuri

morfism — Fie $(G_1,*)$ și $(G_2,\circ)$ două grupuri.

Funcția $f: G_1 \to G_2$ cu proprietatea $f(x * y) = f(x) \circ f(y)\,, \forall x, y \in G_1$ se numește morfism de grupuri.

izomorfism — Funcția $f: G_1 \to G_2$ cu proprietățile $\begin{cases} f \text{ morfism de grupuri} \\ f \text{ funcție bijectivă} \end{cases}$ se numește izomorfism de grupuri.

$(G_1,*) \simeq (G_2,\circ)$ notație pentru grupuri izomorfe

EndG — Dacă $f: G \to G$ morfism atunci f se numește endomorfism al grupului G.

AutG — Dacă $f: G \to G$ izomorfism atunci f se numește automorfism al grupului G.

proprietate — f morfism de grupuri dacă $f: G_1 \to G_2$ $\begin{cases} f(e_1) = e_2 \\ f(x') = \left(f(x)\right)', x \in G_1 \\ f(x^n) = \left(f(x)\right)^n, x \in G_1, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Morfism şi izomorfism de inele

morfism — Fie $(A_1, +,\cdot)$ și $(A_2,*,\circ)$ două inele.

Funcția $f: A_1 \to A_2$ cu proprietățile $\begin{cases} f(x + y) = f(x) * f(y)\,, \forall x, y \in A_1 \\ f(x \cdot y) = f(x) \circ f(y)\,, \forall x, y \in A_1 \end{cases}$

se numește morfism de inele.

izomorfism — Dacă funcția $f: A_1 \to A_2$ verifică $\begin{cases} f \text{ morfism de inele} \\ f \text{ funcție bijectivă} \end{cases}$ atunci f se numește izomorfism de inele.

$(A_1, +,\cdot) \simeq (A_2,*,\circ)$ notație pentru inele izomorfe

Morfism şi izomorfism de corpuri

morfism — Fie $(K_1, +,\cdot)$ și $(K_2,*,\circ)$ două corpuri.

Funcția $f: K_1 \to K_2$ cu proprietățile $\begin{cases} f(x + y) = f(x) * f(y)\,, \forall x, y \in K_1 \\ f(x \cdot y) = f(x) \circ f(y)\,, \forall x, y \in K_1 \end{cases}$

se numește morfism de corpuri.

izomorfism — Dacă funcția $f: K_1 \to K_2$ verifică $\begin{cases} f \text{ morfism de corpuri} \\ f \text{ funcție bijectivă} \end{cases}$ atunci f se numește izomorfism de corpuri.

$(K_1, +,\cdot) \simeq (K_2,*,\circ)$ notație pentru corpuri izomorfe

POLINOAME

Schema lui Horner --- se foloseste pt impartirea polinoamelor cu $(x-a)$

Exemplu1 ---------

$p(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24;$ ----- $\frac{D}{I} = C + \frac{R}{I}$ --- **Teorema impartirii cu rest**

$$\frac{x^3 - 5x^2 - 2x + 24}{x-4} = \left(x^2 - x - 6\right) + \frac{0}{x-4}$$

□	x^3	x^2	x^1	x^0
□	1	-5	-2	24
4	1	4 * 1 - 5 = -1	4 * (-1) - 2 = -6	4 * (-6) + 24 = 0

impartitor $= x^3 - 5x^2 - 2x + 24$

deimpartit $= x - 4$

catul $= 1x^2 - 1x - 6$

restul $= 0$ ---- rezulta -- $x = 4$ este radacina a polinomului $p(x)$

Exemplu2 ---------

$p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 3;$

$$\frac{2x^3 - 3x^2 + 5x - 3}{x-1} = \left(2x^2 - x + 4\right) + \frac{1}{x-1}$$

□	x^3	x^2	x^1	x^0
□	2	-3	5	-3
1	2	1 * 2 - 3 = -1	1 * (-1) + 5 = 4	1 * 4 - 3 = 1

$D = C * I + R$

$$2x^3 - 3x^2 + 5x - 3 = \left(2x^2 - x + 4\right)(x-1) + 1$$

Relatiile lui Viete si Formule de calcul prescurtat

$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab + ac + bc) = V_1^2 - 2V_2$

$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3 - 3(a+b+c)(ab + ac + bc) + 3abc = V_1^3 - 3V_1V_2 + 3V_3$

$a^4 + b^4 + c^4 = V_1^4 + 4V_1V_3 - 4V_1^2V_2 + 2V_2^2$

$(ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2 = V_2^2 - 2V_1V_3$

OBS

$(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3) = ?$

$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-b}{a}$ ---- rezulta --- $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} - x_3;\ x_1 + x_3 = \frac{-b}{a} - x_2;\ x_2 + x_3 = \frac{-b}{a} - x_1;$

$x_1 x_2 x_3 = \frac{-d}{a}$ ------ rezulta ---- $x_1 x_2 = \frac{-d}{a} \frac{1}{x_3}$; $x_1 x_3 = \frac{-d}{a} \frac{1}{x_2}$; $x_2 x_3 = \frac{-d}{a} \frac{1}{x_1}$;

OBS -- - pt polinomul de gr n

===

$S_0 = x_1^0 + x_2^0 + x_3^0 + x_4^0 + ... + x_n^0 = n$

$S_1 = x_1^1 + x_2^1 + x_3^1 + x_4^1 + ... + x_n^1 = V_1 = \frac{-b}{a}$

$S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + ... + x_n^2 = V_1^2 - 2 V_2$

$S_p = \sum_{k=1}^{n} x_k^p$

==

Polinomul de gr 2 -- - intotdeauna cunoastem S_0, S_1, S_2

$x + \frac{1}{x} \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$;

$a S_{n+2} + b S_{n+1} + c S_n = 0$---- pt polin de gr 2 -- -
----pt $n = 0$----- $a S_2 + b S_1 + c S_0 = 0$-- - S_3, S_4 ... s_p din aproape in aproape

----pt $n = 1$---- $a S_3 + b S_2 + c S_1 = 0$

Polinomul de gr 3 ---- intotdeauna cunoastem S_0, S_1, S_2

$a S_{n+3} + b S_{n+2} + c S_{n+1} + d S_n = 0$

pt $n = 0$---- $a S_3 + b S_2 + c S_1 + d S_0 = 0$

pt $n = 1$---- $a S_4 + b S_3 + c S_2 + d S_1 = 0$

Polinomul de gr 4 ---- intotdeauna cunoastem S_0, S_1, S_2

$a S_{n+4} + b S_{n+3} + c S_{n+2} + d S_{n+1} + e S_n = 0$

pt $n = 0$---- $a S_4 + b S_3 + c S_2 + d S_1 + e S_0 = 0$

pt $n = 1$---- $a S_5 + b S_4 + c S_3 + d S_2 + e S_1 = 0$

$V_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{-b}{a}$;

$V_2 = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_1 x_2 + x_3 x_4 = \frac{c}{a}$;

$V_3 = (x_1 + x_2) x_3 x_4 + (x_3 + x_4) x_1 x_2 = \frac{-d}{a}$;

$V_4 = x_1 x_2 x_3 x_4$;

Aratati ca nu toate rad polinomului f sunt reale

--- trebuie aratat ca ---

a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 < 0$; **--- sau**

b) $(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_1 - x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 + (x_3 - x_4)^2 < 0$; **--- sau**

c) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2} < 0$;

LIMITE DE SIRURI

Recurenta liniara

$x_{n+3} = a\, x_{n+2} + b\, x_{n+1} + c\, x_n$

$r^3 = a\, r^2 + b\, r + c$ --- ec caracteristica

Exemplu 1 -------------------

$x_{n+2} = a\, x_{n+1} + b\, x_n$

$r^2 - a\, r - b = 0$

Daca -- $r_1 \neq r_2$ --- $x_n = A\, r_1^{\,n} + B\, r_2^{\,n}$

Daca -- $r_1 = r_2$ --- $x_n = (A\, n + B)\, r_1^{\,n}$

Criterii de convergenta

1) Criteriul majorarii

Daca $|a_n - a| \leq \alpha_n$, si $\alpha_n \to 0$ -- rezulta -- $a_n \to a$

Daca $a_n \geq \alpha_n$, si $\alpha_n \to +\infty$ -- rezulta -- $a_n \to +\infty$

Daca $a_n \leq \alpha_n$, si $\alpha_n \to -\infty$ -- rezulta -- $a_n \to -\infty$

2) Criteriul raportului (d ' Alambert)

Daca $a_n > 0$ oricare $n > n_0$, si daca exista --- $\lim \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = L \in [0, +\infty]$

Avem -- a) Daca $L \in [0, 1]$ --- rezulta $a_n \to 0$

b) Daca $L \in (1, +\infty]$ --- rezulta $a_n \to +\infty$

b) Daca $L = 1$ -- nu putem decide

3) Criteriul radicalului (Cauchy - d ' Alambert)

Daca $a_n > 0$ si daca exista -- $\lim \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = L \in [0, +\infty]$ -- atunci exista $\lim \sqrt[n]{a_n} = L$

4) Lema Cesarro - Stolz

Fie --- a_n, b_n -- 2 siruri

Daca --- b_n = strict monoton si nemarginit si daca exista $\lim \left(\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}\right) = L \in [-\infty, +\infty]$

Avem -- $\lim \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = L$

5) Criteriul Clestelui

Daca $L \leftarrow a_n \leq b_n \leq c_n \to L$ --- atunci $b_n \to L$

Limite Importante --- $a, k \in R$, $n \in N$

$$\lim\left(a^n,\ n\to+\infty\right)=\begin{cases}\infty, & a>1\\ 1, & a=1\\ 0, & |a|\le 1\\ \text{nu exista} & a\le -1\end{cases}$$

$$\lim\left(n^k,\ n\to+\infty\right)=\begin{cases}\infty, & k>0\\ 1, & k=0\\ 0, & k<0\end{cases}$$

$\lim\left(n^k a^n,\ n\to\infty\right)=0$---- daca -- $x=-1$-- (lim alternanta -- 1, -1, 1, -1 ....)

$\lim\left(\frac{a^n}{n^k},\ n\to\infty\right)=\infty$--- daca --- $a>1$ si $k\in N$

$$\lim\left(\frac{\ln n}{n}\right)=0;$$

$$\lim\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ n\to\infty\right)=1^\infty=e;$$

$$\lim\left((1+n)^{\frac{1}{n}},\ n\to 0\right)=1^\infty=e;$$

===

Serii Numerice Convergente si Divergente. Sirul sumelor partiale a unei serii

Fie un sir cu termen general --- $a_n=\frac{7n+3}{n(n+1)(n+3)}$, $n\ge 1$;

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$--- seria numerica

--sirul sumelor partiale a seriei

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{7k+3}{k(k+1)(k+3)}=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k}+\frac{2}{k+1}-\frac{3}{k+3}\right]=\frac{7}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+2}-\frac{3}{n+3};$$

$$S_1=\sum_{k=1}^{1}a_k=a_1=\frac{7.1+3}{1.2\times.4}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}=1.25;$$

$$S_2=\sum_{k=1}^{2}a_k=a_1+a_2=\frac{5}{4}+\frac{17}{30}=\frac{109}{60}=1.816$$

... ...

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{7}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+2}-\frac{3}{n+3};$$

$$\lim\left(S_n,\ n\to\infty\right)=\frac{7}{2};$$

Siruri Recurente

Sirul de numere reale este o functie definita pe multimea ℕ sau o multime finita A inclusa in ℕ si ia valori reale. El se poate descrie prin mai multe forme :

- printr-o regula de calcul $a_n = e^{n+1}$
- prin mai multe reguli de calcul:

$$a_n = \begin{cases} n+1, daca\ n = par \\ n^2, daca\ n = impar \end{cases}, n \geq 0$$

printr-o relatie de recurenta:

$(a_n)n \geq 0\ a_0 = 1, a_{n+1} = a_n + 1, n \geq 0$

$(x_n)n \geq 0\ x_0 = 2, x_{n+1} = 3x_n, n \geq 0$

$(y_n)n \geq 0\ y_0 = 1,\ y_1 = -1,\ y_{n+1} = y_n - 3y_{n-1}, n \geq 0$

$(z_n)n \geq 0\ z_0 = 1, z_n = \sqrt{3 + z_{n+1}^2}, n \geq 1$

Un sir se numeste recurent daca este definit de o relatie de forma $x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k}), n > k$ cu $x_1, x_2, \dots, x_k$ termeni cunoscuti. In acest caz $k \varepsilon$ ℕ se numeste ordinul relatiei de recurenta.

- ***RECURENTA DE ORDIN I***

Un sir definit prin relatia $x_n = ax_{n-1} + b\ \forall\ n \varepsilon\ \mathbb{N}^*$, a,b ε ℝ fixate si x_0 dat se numeste sir recurent definit printr-o recurenta liniara de ordin intai.

Vom scrie mai multe relatii:

$x_n = ax_{n-1} + b$

$x_{n-1} = ax_{n-2} + b$

$x_{n-2} = ax_{n-3} + b$

.

.

$x_2 = ax_1 + b$

$x_1 = ax_0 + b$

adica(n) relatii pe care le vom multiplica de la relatia (2) la relatia (n) cu : $a, a^2, \dots, a^{n-2}, a^{n-1}$ si apoi se vor aduna membru cu membru:

Vom obtine:

$$x_n + ax_{n-1} + a^2x_{n-2} + \dots + a^{n-2}x_2 + a^{n-1}x_1 = ax_{n-1} + a^2x_{n-2} + a^3x_{n-3} + \dots + a^{n-1}x_1 + \\ +(1 + a + a^2 + \dots + a^{n-2} + a^{n-1})b + a^nx_0$$

Vom reduce termenii asemenea din cei doi membri ai relatiei obtinute si se deduce

$$x_n = b(1 + a + a^2 + \dots + a^{n-2} + a^{n-1}) + a^nx_0$$

adica:

$$x_n = \frac{b(a^{n-1} - 1)}{a - 1} + a^nx_0, n \geq 1\ si\ a \neq 1$$

iar pentru $a = 1$, avem : $x_n = bn + a^nx_0$

Cazuri particulare:

1. pentru $a = 1$, $(x_n)n \geq 0$ devine o progresie aritmetica
2. pentru $b = 0$, $(x_n)n \geq 0$devine o progresie geometrica

Convergenta sirurilor recurente de ordinul intai se stabileste prin mijloacele invatate pana in acest moment cu ajutorul teoriei. Teorema principala T. Weierstrass va fi folosita pentru a cerceta monotonia si marginea sirului. Principiul inductiei matematice va fi folosit pentru a determina monotonia si marginirea.

Partea interesanta a sirurilor recurente este ca pentru a observa comportamentul unor astfel de siruri – convergenta sau divergenta – se presupune sirul convergent si se trece la limita in relatia de recurenta, determinand in acest mod limita finita sau infinita.

Studiati convergenta sirului $(x_n)n \geq 1$ $x_1 = 5, x_n = \frac{1}{4}x_{n-1} + 3$ si gasiti forma termenului general.

$x_n = \frac{1}{4}x_{n-1} + 3$

$x_{n-1} = \frac{1}{4}x_{n-2} + 3$

$x_{n-2} = \frac{1}{4}x_{n-3} + 3$

.

.

.

$x_3 = \frac{1}{4}x_2 + 3$

$x_2 = \frac{1}{4}x_1 + 3, deci$ sunt (n-1) relatii

Cele $(n-1)$ relatii s-au amplificat cu $\frac{1}{4}; \frac{1}{4^2}; \ ...; \frac{1}{4^{n-2}}; \frac{1}{4^{n-1}}$ incepand de la relatia (2) pana la relatia $(n-1)$.

Din care: $x_n + \frac{1}{4}x_{n-1} + \frac{1}{4^2}x_{n-2} + \ ... + \frac{1}{4^{n-2}}x_3 + \frac{1}{4^{n-1}}x_2 = \frac{1}{4}x_{n-1} + \frac{1}{4^2}x_{n-2} + \ ... + \frac{1}{4^{n-2}}x_3 + \frac{1}{4^{n-1}}x_2 + 3\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ ... + \frac{1}{4^{n-2}} + \frac{1}{4^{n-1}}\right) + \frac{1}{4^n}x_1$

Deci $x_n = \frac{1}{4^n} \cdot 5 + \frac{3\left(\frac{1}{4^n}-1\right)}{\frac{1}{4}-1}$ sau $x_n = \frac{1}{4^n} \cdot 5 + 4\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$.

Vom avea: $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4^n} \cdot 5 + 4 - \frac{1}{4^{n-1}}\right) = 4$

Studiem monotonia sirului :

$x_1 = 5$

$x_2 = \frac{5}{4} + 3 = \frac{17}{4}$

$x_3 = \frac{17}{16} + 3 = \frac{65}{16}$

Avem $x_1 > x_2 > x_3$ presupunem ca $x_n < x_{n-1}$ Adevarat si demonstram $x_{n+1} < x_n$, dar $x_{n+1} = \frac{1}{4}x_n + 3$ si $x_n = \frac{1}{4}x_{n-1} + 3$.

Deci $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{4}(x_n - x_{n-1}) < 0$ din presupunerea facuta.

Asadar $P(n)$ adevarat => $P(n+1)$ adevarat $\forall\ n \geq 1$ Sirul $(x_n), n \geq 1$ este descrescator.

Vom avea $x_n \leq 5\ \forall n \geq 1$, din monotonie si primul termen.
Studiem marginirea sirului: vom demonstra ca $x_n > 4$.
Se verifica $x_1 = 5 > 4, x_2 = \frac{17}{4} > 4, x_3 = \frac{65}{16} > 4$
Presupunem $x_n > 4$ Adevarat si demonstram ca $x_{n+1} > 4$
Vom avea: $x_{n+1} - 4 = \frac{1}{4}x_n + 3 - 4 = \frac{1}{4}x_n - 1 = \frac{x_n - 4}{4} > 0$ deoarece se stie ca $x_n > 4$.
Asadar, $x_{n+1} > 4\ \forall n \geq 1$.
Prin urmare $x_n \in (4; 5]\ \forall\ n \geq 1$
Fiind monoton si marginit, $(x_n)n \geq 1$ este convergent.
Notam $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ si trecem la limita in relatia de recurenta.
Se obtine ecuatia $t = \frac{1}{4}t + 3 \Rightarrow 4t = t + 12 \Rightarrow 3t = 12 \Rightarrow t = 4$

TEMA 1: Folosind modelul de mai sus, gasiti formula termenului general si studiati convergenta sirurilor.

1) $x_1 = 2$
   $x_n = -\frac{1}{3}x_{n-1} - 1, n \geq 2$
2) $x_1 = 3$
   $x_n = \frac{1}{3}x_{n-1} + \frac{1}{2}, n \geq 2$
3) $x_1 = -1$
   $x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + 1, n \geq 2$

Recurenta de ordinul II

Un sir definit prin relatia $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n, \forall\, n \geq 1$, cu x_1, x_2 fixati si a,b numere reale date, se numeste sir recurent definit prin relatie de recurenta de ordinul II.

Sirul $(x_n), cu\ x_n = 0, n \geq 3$ verifica recurenta de ordin II.

Se vor cauta solutii de forma: $x_n = r^n$, cu $r \neq 0$.

Avem $r^{n+2} = ar^{n+1} + br^n$ se simplifica cu $r^n \neq 0$ si se rezolva ecuatia de gradul II:

$$r^2 - ar - b = 0$$

numita ecuatia caracteristica asociata recurentei.

Daca $\Delta = a^2 + 4b > 0$ avem $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ si sunt distincte. Forma sirului va fi:

$$x_n = ur_1^n + vr_2^n$$

iar *u* si *v* se vor determina folosind conditiile initiale intr-un sistem:

$$\begin{cases} ur_1 + vr_2 = x_1 \\ ur_1^2 + vr_2^2 = x_2 \end{cases}$$

Daca $\Delta = a^2 + 4b = 0$ *0* avem $r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$. Forma sirului va fi:

$$x_n = ur_1^n + vnr_1^n$$

iar *u* si *v* se vor determina folosind conditiile initiale.

Daca $\Delta = a^2 + 4b < 0$ cele doua radacini vor fi complexe si conjugate $r_1, r_2 \epsilon \mathbb{C}$, se vor exprima in forma trigonometrica:

$$\begin{cases} r_1 = \rho(\cos t + i \sin t) \\ r_2 = \rho(\cos t - i \sin t) \end{cases}$$

In acest caz, sirul (x_n) va avea urmatoarea forma:

$$x_n = \rho(u \cos nt + v \sin nt)$$

Iar *u* si *v* se determina din conditiile initiale.

In cazul recurentei de gradul II vom urmari sa determinam forma termenului general si limita sirului.

Asadar sa recapitulam etapele de lucru:

- scrierea ecuatiei caracteristice
- rezolvarea ecuatiei caracteristice
- descrierea formei sirului in functie de natura si numarul radacinilor

In urmatoarele exemple se vor aborda situatiile descries in modelul teoretic pentru a determina forma termenului general si eventual convergenta.

1. Fie sirul $(x_n), n \geq 1, x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n, x_1 = 1, x_2 = 3$

Ecuatia caracteristica este: $r^2 = 5r - 6 \Rightarrow r_2 - 5r + 6 = 0$ si are radacinile $r_1 = 2$ si $r_2 = 3$ reale si distincte.

Atunci $x_n = u2^n + v3^n$ vom avea:

$\begin{cases} 2u + 3v = 1 \\ 4u + 9v = 3 \end{cases}$

din care: $u = 0$ si $v = \frac{1}{3}$

Asadar: $x_n = \frac{1}{3} \cdot 3^n$

$x_n = 3^{n-1}$, $n \geq 1$ este crescator si convergent la +∞

2. Fie $(x_n), n \geq 1, 15x_{n+2} = -2x_{n+1} + x_n, x_1 = 0, x_2 = 1$

Ecuatia caracteristica: $15r^2 = -2r + 1 \Rightarrow 15r^2 + 2r - 1 = 0$

$r_{1/2} = \frac{-2\pm\sqrt{4+60}}{30} = \frac{-2\pm8}{30}, r_1 = -\frac{1}{3}, r_2 = \frac{1}{3}$

Avem: $x_n = u\left(\frac{1}{3}\right)^n + v\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ si $\begin{cases} \frac{u}{3} - \frac{v}{3} = 0 \\ \frac{u}{9} + \frac{v}{9} = 1 \end{cases} \Rightarrow x_n = \frac{9}{2}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]$ $n \geq 1$

Pentru n = *par:* $x_{2n} = \frac{9}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3^n} = \frac{9}{3^n} \to 0$

Pentru n = *impar:* $x_{2n-1} = 0 \to 0$

Deci: $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

3. Fie $(x_n), n \geq 1, x_{n+2} = 4x_{n+1} - 4x_n, x_1 = 1, x_2 = 2$

Ecuatia caracteristica: $r^2 = 4r - 4 \Rightarrow r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 2$

Deci: $x_n = u2^n + vn2^n$ si $\begin{cases} 2u + 2v = 1 \\ 4u + 8v = 2 \end{cases}$

Vom avea: $v = 0$ si $u = \frac{1}{2}$

Deci: $x_n = \frac{1}{2} \cdot 2^n = 2^{n-1} \to \infty$

4. Fie (x_n) $n \geq 1, x_{n+2} = \frac{1}{4}x_{n+1} - \frac{1}{16}x_n, x_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{8}, x_2 = \frac{-1+\sqrt{3}}{32}$

Ecuatia caracteristica: $r^2 = \frac{1}{4}r - \frac{1}{16} \Rightarrow 16r^2 - 4r + 1 = 0$ cu $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$

$r_{1,2} = \frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot16}}{2\cdot16} = \frac{4\pm4i\sqrt{3}}{2\cdot16} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow r_1 = \frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ si $r_1 = \frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

Avem $x_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(u\cos\frac{n\pi}{3} + v\sin\frac{n\pi}{3}\right)$ si $\begin{cases} \left(u\cdot\frac{1}{2} + v\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{1}{4} = \frac{1+\sqrt{3}}{8} \\ \left(u\cos\frac{2\pi}{3} + v\sin\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\frac{1}{4} = \frac{-1+\sqrt{3}}{8} \end{cases} \Rightarrow u = 1\ si\ v = 1$

Vom avea: $x_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\cos\frac{n\pi}{3} + \sin\frac{n\pi}{3}\right), n \geq 1$

$$x_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n \cos\frac{n\pi}{3} + \left(\frac{1}{4}\right)^n \sin\frac{n\pi}{3}$$

Cum $\left(\frac{1}{4}\right)^n \to 0$ si $\cos\frac{n\pi}{3} \leq 1, \sin\frac{n\pi}{3} \leq 1$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

Produsul unui sir marginit cu un sir convergent la 0 este un sir convergent la 0.

5. Iata acum si enuntul lui Fibonacci:

$\boxed{f_{n+2} = f_{n+1} + f_n}\ n \geq 1\ cu\ f_1 = f_2 = 1$ sau $\boxed{f_{n+1} = f_n + f_{n-1}}\ cu\ f_0 = 0,\ f_1 = 1$

Cu $r^2 = r + 1$ are radacinile $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{3}, r_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

Deci: $f_n = u\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{3}\right)^n + v\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ convergent la $+\infty$

6. Un alt model de sir recurent iese din tiparele descrise, dar pastreaza modalitatea de rezolvare.

Astfel, fie

$(x_n), n\epsilon\mathbb{N}, x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}, x_0 = \sqrt{2}$

Vom avea: $x_0 = \sqrt{2}, x_1 = \sqrt{1+\sqrt{2}}, x_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

Toti termenii $x_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$

Observam: $x_n^2 = 2 + x_{n-1}$ si $x_{n+1}^2 = 2 + x_n$

Presupunem ca $x_n > x_{n-1}$ Adevarat si demonstram ca $x_{n+1} > x_n$.

Avem: $x_{n+1}^2 - x_n^2 = 2 + x_n - (2 + x_{n-1}) = x_n - x_{n-1} > 0 \Rightarrow x_{n+1}^2 - x_n^2 > 0 \Rightarrow x_{n+1} > x_n$

$\Rightarrow (x_n)\ crescator$

Deci: $x_n \geq x_0\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n \geq \sqrt{2}$

Vom arata ca $x_n < 2\ \forall n \in \mathbb{N}$

$x_0 = \sqrt{2} < 2$

$x_1 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} < \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$

Presupun ca $x_n < 2$ Adevarat si demonstram ca $x_{n+1} < 2$

Dar $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} < \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$

Deci: $x_n \in [\sqrt{2}; 2)\ \forall n \in \mathbb{N}$

Fie $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ trecem la limita in recurenta: $x = \sqrt{2+x} \Rightarrow x^2 = 2 + x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$ cu solutiile $x_1 = -1\ (nu\ convine), x_2 = 2$

FISA NR. 2

Sa se arate ca urmatoarele siruri sunt divergente, gasind forma termenului general prin tehnica descrisa pentru recurenta de ordin 2:

a) $x_{n+1} = x_{n-1}, n \geq 1, x_0 = 1, x_1 = 0$
b) $x_{n+1} = -\frac{1}{2}(x_n - x_{n-1}), n \geq 1, x_0 = 0, x_1 = 2$
c) $x_{n+1} = -x_{n+2}, n \geq 0, x_0 = 0$
d) $x_{n+1} = -\frac{1}{2}x_n + (-1)^n, n \geq 0, x_0 = 1$
e) $x_n = 3x_{n-1} + 1, n \geq 2, x_1 = 1$

LIMITE DE FUNCTII

$$\text{Limit}\left[x^n, n \to \infty\right] = \begin{cases} +\infty & x > 1 \\ 1 & x = 1 \\ 0 & -1 < x < 1 \\ \text{nu exista} & x \le -1 \end{cases}$$

$$\lim\left(x^x, x \to 0\right) = 1$$

$$f^g = e^{\ln f^g} = e^{g \ln f}$$

$\ln(1+x) \le x$ -- oricare $x \ge 0$

$$x + \frac{1}{x} \ge 2$$

Calcul de limite cu Riemann

$$\lim\left[\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)\right] = \int_a^b f(x)\,dx$$

pt $a = 0$ -- $b = 1$; --- $\lim \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx$;

Formula Sterling pt Limite

$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\alpha_n}$ --- unde $\frac{1}{12n+1} \le \alpha_n \le \frac{1}{12n}$ -- unde -- $\alpha_n \to 0$;

$$\lim \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+p)} = \frac{1}{p}\left[\frac{1}{p!} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+p)}\right];$$

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)\ldots(k+p)} = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{k(k+1)(k+2)\ldots(k+p-1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)\ldots(k+p)}\right);$$

CONTINUITATEA FUNCTIILOR
(f c se testeaza numai pe D_{max})

OBS : Nu se pune problema continuitatii in punctele unde nu este def functia ! ! !

In punctele de discontinuitate nu exista derivata. O fc derivabila este si continua.
Reciproca nu este adevarata ! ! ! O fc continua poate sa nu fie derivabila

Derivabilitatea se face numai pe intervale deschise.
Se calculeaza apoi derivata in x_0 folosind definitia --- $f_{s,d}'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$;

$l_s(x_0) = l_d(x_0) = f(x_0)$ --- $x_0 \in D_{max}$ ---- fc este cont in $x_0 \in D_{max}$

Proprietatea Cauchy – Bolzano ---- Daca :

1) f : I → R --- fc continua pe I si --- a, b ∈ I, a < b

2) f (a) f (b) < 0 ----

Rezulta --- Ecuatia f (x) = 0 -- are cel putin o sol in intervalul (a, b)

Punct de discontinuitate de speta I – daca limitele laterale exista si sunt finite si diferite

$l_s(x_0) \neq l_d(x_0)$ --- $x_0 \in D_{max}$

--- in toate celelalte cazuri avem discontinuitate de speta II

Functii continue – Derivabilitatea functiilor

– toate fc fara ramificatie sunt continue pe tot D_{max}

– functiile sunt continue si in punctele unice

ex : f : {–1} ⋃ [0, 1] --- fc continua automat si in $x_0 = -1$

multimea punctelor de deriv ale fc sunt -- x ∈ (0, 1)

3) Sirul lui Rolle -- alternativa

O ecuatie cu coef complecsi are cel putin o sol reala intre [a, b]

--- daca fc asociata ecuatiei satisface cond :

---- f – continua pe [a, b]

---- f (a) f (b) < 0;

---- daca in plus fc este strict monotona pe [a, b] -- fc are sol unica in [a, b]

OBS : -- pt a gasi un interval mai mic unde se afla sol unica din [a, b]

--- se cauta c ∈ [a, b] pt care f (c) are semn dif de f (a) sau f (b)
-- rezulta sol ∈ [c, b] sau ∈ [a, c]

◆ REZUMATUL CAPITOLULUI ◆

Noțiuni	*Definiții - Proprietăți*
Funcție continuă într-un punct x_0 al domeniului de definiție	$f: D \to \mathbf{R}$ este *continuă* în $x_0 \in D$ dacă și numai dacă pentru orice vecinătate V a lui $f(x_0)$ există o vecinătate U a lui x_0 astfel încât pentru orice $x \in U \cap D$ să avem $f(x) \in V$
Funcție continuă pe o mulțime	$f: D \to \mathbf{R}$, $M \subset D$, spunem că f este *continuă* pe M, dacă este continuă în toate punctele mulțimii M
Continuitatea cu ajutorul limitei	$f: D \to \mathbf{R}$, $x_0 \in D$, x_0 punct de acumulare al mulțimii D; f este continuă în x_0 dacă și numai dacă f are limită în x_0 și $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
Continuitatea funcțiilor elementare	*Funcțiile elementare sunt continue pe domeniile lor de definiție*
Puncte de discontinuitate	Punctul de discontinuitate $x_0 \in D$ se numește punct de discontinuitate de *prima speță* al funcției $f: D \to \mathbf{R}$, dacă limitele laterale ale funcției în x_0 există și sunt finite. Punctul de discontinuitate $x_0 \in D$ se numește punct de discontinuitate de *speța a doua* pentru $f: D \to \mathbf{R}$, dacă nu este de prima speță.
Operații cu funcții continue	Suma, diferența, produsul, câtul și compunerea a două funcții continue este o funcție continuă
Proprietăți ale funcțiilor continue pe intervale	Funcția $f: I \to \mathbf{R}$, I interval, $I \subset \mathbf{R}$, are proprietatea lui *Darboux* dacă oricare ar fi $a, b \in I$, $a < b$ și oricare ar fi λ cuprins între $f(a)$ și $f(b)$ există $c \in (a, b)$ astfel încât $f(c) = \lambda$. Orice funcție continuă pe un interval, are proprietatea lui *Darboux* pe acel interval. Dacă $f: I \to \mathbf{R}$, I interval, $I \subset \mathbf{R}$, este o funcție continuă pe I, iar $a, b \in I$ astfel încât $f(a) \cdot f(b) < 0$, atunci există $c \in (a, b)$ cu proprietatea $f(c) = 0$. Dacă $f: I \to \mathbf{R}$, I interval, $I \subset \mathbf{R}$, este funcție continuă care nu se anulează pe I, atunci f păstrează semnul constant pe I.

LIMITE DE FUNCTII

FUNCŢII – LIMTE UZUALE. LIMITE REMARCABILE

<table>
<tr><td colspan="3">$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$</td><td colspan="3">$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$</td><td colspan="3">$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{x}=-\infty$</td><td colspan="3">$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}=+\infty$</td></tr>
<tr><td colspan="12">$\lim\limits_{x\to\infty}x^a=\begin{cases}\infty, \text{daca } a>0\\0, \text{daca } a<0\end{cases}$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}=\infty$</td><td colspan="4">$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{x}=\infty$</td><td colspan="4">$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x}=-\infty$</td></tr>
<tr><td colspan="6">$\lim\limits_{x\to\infty}a^x=\begin{cases}\infty\text{ , daca } a>1\\0\text{ , daca } a\in(0,1)\end{cases}$</td><td colspan="6">$\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=\begin{cases}0\text{ , daca } a>1\\\infty\text{ , daca } a\in(0,1)\end{cases}$</td></tr>
<tr><td colspan="6">$\lim\limits_{x\to\infty}\log_a x=\begin{cases}\infty\text{ , daca } a>1\\-\infty\text{ , daca } a\in(0,1)\end{cases}$</td><td colspan="6">$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\log_a x=\begin{cases}-\infty\text{ , daca } a>1\\\infty\text{ , daca } a\in(0,1)\end{cases}$</td></tr>
<tr><td colspan="6">$\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{2}$</td><td colspan="6">$\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg} x=-\frac{\pi}{2}$</td></tr>
<tr><td colspan="6">$\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\x<\frac{\pi}{2}}}\operatorname{tg} x=+\infty$</td><td colspan="6">$\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\x>\frac{\pi}{2}}}\operatorname{tg} x=-\infty$</td></tr>
<tr><td colspan="12">$\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)=f(\alpha)$ unde $f:\mathbf{D}\to\mathbf{R}$ funcţie elementară si $\alpha\in\mathbf{D}$ punct de acumulare</td></tr>
<tr><td colspan="12">funcţiile trigonometrice nu au limită în punctele $\infty,-\infty$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$</td><td colspan="4">$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$</td><td colspan="4">$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$</td></tr>
<tr><td colspan="6">$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$</td><td colspan="6">$\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$</td></tr>
<tr><td colspan="6">$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=1$</td><td colspan="6">$\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$</td></tr>
<tr><td colspan="6">$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^k}{a^x}=0 \text{ , } k\in\mathbf{N} \text{ , } a>1$</td><td colspan="6">$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a^x}{x^k}=\infty \text{ , } k\in\mathbf{N} \text{ , } a>1$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$</td><td colspan="4">$\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \text{ , } a>0$</td><td colspan="4">$\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^r-1}{x}=r \text{ , } r\in\mathbf{R}$</td></tr>
</table>

OPERAȚII CU LIMITE (ȘIRURI ȘI FUNCȚII)

REGULI DE CALCUL CU LIMITE FINITE

Șiruri	Funcții
daca $\lim a_n = a$ si $\lim b_n = b$ unde $a,b \in \mathbf{R}$, atunci : $\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n = a \pm b$ $\lim(\alpha \cdot a_n) = \alpha \cdot \lim a_n = \alpha \cdot a$ $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n = a \cdot b$ $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} = \frac{a}{b}$ unde $b \neq 0$ $\lim\left(a_n^{b_n}\right) = (\lim a_n)^{\lim b_n} = a^b$ unde $(a,b) \neq (0,0)$	daca $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = l_1$, $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = l_2$, l_1 , $l_2 \in \mathbf{R}$ atunci **:** $\lim\limits_{x\to\alpha}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to\alpha} f(x) \pm \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = l_1 \pm l_2$ $\lim\limits_{x\to\alpha} a \cdot f(x) = a \cdot \lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = a \cdot l_1$ $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = l_1 \cdot l_2$ $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)}{\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$ unde $l_2 \neq 0$ $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)^{g(x)} = \left[\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)} = l_1^{l_2}$ unde $(l_1, l_2) \neq (0,0)$

REGULI DE CALCUL CU LIMITE INFINITE, EXPRIMATE FORMAL

Adunare	$\infty + \infty = \infty$ $-\infty - \infty = -\infty$		$\infty + a = \infty$, $a \in \mathbf{R}$ $-\infty + a = -\infty$, $a \in \mathbf{R}$			cazuri de nedeterminare: $\infty - \infty$; $-\infty + \infty$
Inmultire	$\infty \cdot \infty = \infty$ $\infty \cdot (-\infty) = -\infty$ $(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$	$\infty \cdot a = \begin{cases} \infty, a > 0 \\ -\infty, a < 0 \end{cases}$ $a \in \mathbf{R}^*$		$(-\infty) \cdot a = \begin{cases} -\infty, a > 0 \\ \infty, a < 0 \end{cases}$ $a \in \mathbf{R}^*$		cazuri de nedeterminare: $\infty \cdot 0$; $-\infty \cdot 0$
Impartire	$\frac{a}{\infty} = 0$, $a \in \mathbf{R}$ $\frac{a}{-\infty} = 0$, $a \in \mathbf{R}$	$\frac{\infty}{a} = \begin{cases} \infty, a > 0 \\ -\infty, a < 0 \end{cases}$ $a \in \mathbf{R}^*$		$\frac{-\infty}{a} = \begin{cases} -\infty, a > 0 \\ \infty, a < 0 \end{cases}$ $a \in \mathbf{R}^*$		cazuri de nedeterminare: $\frac{\infty}{\infty}; \frac{\infty}{-\infty}; \frac{-\infty}{\infty}; \frac{-\infty}{-\infty}; \frac{0}{0}$
Putere	$\infty^{\infty} = \infty$ $\infty^{-\infty} = 0$	$\infty^a = \begin{cases} \infty, a > 0 \\ 0, a < 0 \end{cases}$ $a \in \mathbf{R}^*$	$a^{\infty} = \begin{cases} \infty, a > 1 \\ 0, 0 < a < 1 \end{cases}$ $a \in (0,\infty) - \{1\}$ $0^{\infty} = 0$	$a^{-\infty} = \begin{cases} 0, a > 1 \\ \infty, 0 < a < 1 \end{cases}$ $a \in (0,\infty) - \{1\}$		cazuri de nedeterminare: $1^{\infty}; 1^{-\infty}$ **;** ∞^0 **;** 0^0
Cazul $\frac{1}{0}$	$\frac{1}{0_-} = -\infty$			$\frac{1}{0_+} = \infty$		
Limita functiei compuse	$\lim\limits_{x\to\alpha} f(g(x)) = \lim\limits_{y\to\beta} f(y)$ unde $\beta = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$					

7. Limita unei funcţii compuse

Teoremă: Fie funcţiile $u:A\to B$ şi f: $B\to R$ R, a un punct de acumulare al mulţimii A şi b un punct de acumulare al mulţimii B.
Dacă: $i)\lim_{x\to a}u(x)=b$

$$ii)u(x)\neq b,\forall x\in A-\{a\}\qquad \Rightarrow \lim_{x\to a} f(u(x))=l$$

$$iii)\lim_{y\to b} f(y)=l$$

Consecinţa 1. în condiţiile teoremei anterioare, dacă în plus b e B , iar **f este o funcţie elementară**, putem scrie:

$$\lim_{x\to a} f(u(x))= f(\lim_{x\to a}u(x))$$

Exemplu: $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\cos 2x=\cos\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}2x\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

Consecinţa 2. Dacă f are limită în x_0, atunci | f | are limită în x_0 şi $\lim_{x\to x_0}|f(x)|=\left|\lim_{x\to x_0} f(x)\right|$ (limita modulului = modulul limitei)

Un procedeu practic pentru calculul limitelor funcţiilor compuse îl constituie **metoda substituţiei.**
Această metodă constă în aplicarea teoremei privind limita funcţiei compuse, folosind notaţii convenabile.

Exemple. $1)\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}}=?$

$not.:u(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}.\quad Avem:\lim_{x\to\infty}u(x)=1, şi\ \ u(x)\neq 1\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{u(x)}=1$

$2)\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}\ln\sqrt{x}=?$

$not: y=\sqrt{x}\quad şi\ \ y\to 0, y>0\Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}\sqrt{x}=\lim_{\substack{y\to 0\\y>0}}y=0$

$3)\ \lim_{x\to-\infty}\sin e^x=?$

$not: y=e^x\Rightarrow y\to 0\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\sin e^x=\lim_{y\to 0}\sin y=0$

8. Limite remarcabile

Următoarele formule permit calculul unor limite în cazurile de nedeterminare $\frac{0}{0}$ *şi* 1^{∞} numărul *e* este un număr iraţional cu valoarea aproximativă 2,71828132855).

$\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$

În particular dacă a=e

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^r-1}{x}=r$$

$r\in R$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1$$

1^{∞} →

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

$$\lim_{x\to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

Exemple.

1.) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{\ln(2x+1)}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(x+1)}{x}}{\frac{\ln(2x+1)}{2x}}=\frac{1}{2}$$

2.) $$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-3^x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^x-1}{x}-\frac{3^x-1}{x}\right)=\ln 2-\ln 3=\ln\frac{2}{3}$$

3.) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^{\frac{1}{3}}-1}{x}=\frac{1}{3}$$

4.) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 7x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{\sin 7x}{7x}}\cdot\frac{2}{7}=\frac{2}{7}$$

5) $$l=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}=\lim_{x\to 0}\left(\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{2x}{x-1}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x-1}}=e^{2}$$

9. Metode de calcul al limitelor de funcţii în unele cazuri de nedeterminare

Cazul $\frac{0}{0}$

1. Metoda factorului comun:

Exemple.

$$1.)\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^3+2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x(\overset{\nearrow 2}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1})}{x^{\frac{3}{2}}\underset{\searrow 1}{\sqrt{1+\frac{2}{x^3}}}}=\lim_{x\to\infty}x^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{2}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$$

$$2.)\lim_{x\to\infty}\frac{2^x+5^x}{3^x+4^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{5^x\left(\left(\frac{2}{5}\right)^x+1\right)}{4^x\left(\left(\frac{3}{4}\right)^x+1\right)}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^x\cdot\frac{1}{1}=+\infty$$

$$3.)\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\ln x-2}{\ln x+2}=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{(\ln x)\left(1-\frac{2}{\ln x}\right)}{(\ln x)\left(1+\frac{2}{\ln x}\right)}=1$$

2. Utilizarea unor limite remarcabile

Această metodă constă în aplicarea următoarelor formule (care vor fi demonstrate în capitolele următoare)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{a^x}=0 \quad a>1$$

(**exponenţiala “ajunge mai repede” la infinit decât polinomul**)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{x^n}=\infty \quad a>1$$

Exemplu:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{2^x+3^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{3^x\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x+1\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{3^x}=0$$

3. Simplificarea

Pentru realizarea simplificării se folosesc diverse procedee cum sunt: folosirea unor formule de calcul prescurtat, metoda substituţiei, amplificarea cu conjugata.

$$\lim_{x\to3}\frac{x^3-27}{x^2-9}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to3}\frac{x^2+3x+9}{x+3}=\frac{27^{(3}}{6}=\frac{9}{2}$$

4.Substituţia

Pentru a calcula $\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$ în cazul $\frac{0}{0}$ (P şi Q sunt funcţii polinomiale), dacă descompunerea în factori a lui *P(x)* şi *Q(x)* este dificilă, folosim substituţia.

$$x - x_0 = y$$

Exemplu:

$l = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 7x^2 + 21x - 15}{x^4 + 2x^3 + x - 4}$ facem substituţia x- 1 = y atunci $x = y + 1$ şi $y \to 0$

Limita devine: $l = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 7x^2 + 21x - 15}{x^4 + 2x^3 + x - 4} = \lim_{y \to 0} \frac{(y+1)^3 - 7(y+1)^2 + 21(y+1) - 15}{(y+1)^4 + 2(y+1)^3 + (y+1) - 4} = \ldots = \frac{10}{11}$

5. Folosirea formulelor cu privire la limitele remarcabile

Exemplu:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1 + 1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} + \frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} + \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 1 + \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = 1 + \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Cazul $\infty-\infty$

1. Metoda factorului comun:

$$1.)\ \lim_{x\to\infty}\left(x^2-3x+1\right)=\lim_{x\to\infty}x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=\infty\cdot1=\infty$$

$$2.)\ \lim_{x\to\infty}\left(2^x+3^x-4^x\right)=\lim_{x\to\infty}4^x\left(\left(\frac{2}{4}\right)^x+\left(\frac{3}{4}\right)^x-1\right)=\infty\cdot(-1)=\infty$$

$$3.)\ \lim_{x\to\infty}(\ln x-x)=\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{\ln x}{x}-1\right)=\infty\cdot(-1)=-\infty$$

$$4.)\ \lim_{x\to\infty}\left(2x-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to\infty}x\left(2-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)=\infty\cdot1=\infty$$

2. Metoda conjugatei

în cazul în care expresia a cărei limită trebuie calculată conţine radicali, o altă metodă este **amplificarea cu expresia conjugată**.

Exemple.

1. Pentru a calcula $\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)$, metoda factorului comun **nu** este eficientă deoarece conduce la nedeterminarea [∞ • 0].

Procedăm astfel:

$$1.)\ \lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{-1}{\infty}=0$$

$$2.)\ \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)x}+\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{\infty}=0$$

Cazul $0 \cdot \infty$

Scriind produsul f • *g* sub una din fo[rmele] $f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}}$ sau $f \cdot g = \frac{g}{\frac{1}{f}}$ $0 \cdot \infty$ se transf[ormă] în [caz]ul $\frac{0}{0}$ sau în [caz]ul $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemple. **1.** $\lim\limits_{x \to \infty} x \sin \frac{1}{x^2} \overset{[\infty \cdot 0]}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = 1 \cdot 0 = 0.$

2. $\lim\limits_{x \searrow 0} x e^{\frac{1}{x}} \overset{[0 \cdot \infty]}{=} \lim\limits_{x \searrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim\limits_{y \to \infty} \frac{e^y}{y} = \infty.$

Cazul 1^{∞}

în acest caz, se foloseşte formula $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$ de unde rezultă că $\lim\limits_{u(x) \to 0} [1 + u(x)]^{\frac{1}{u(x)}} = e$

Exemplu. $\lim\limits_{x \to 5} (6 - x)^{\frac{1}{25 - x^2}} = \lim\limits_{x \to 5} \left((1 + (5 - x))^{\frac{1}{5 - x}} \right)^{\frac{5 - x}{25 - x^2}} = e^{\lim\limits_{x \to 5} \frac{1}{5 + x}} = e^{\frac{1}{10}}.$

DERIVATE

$(u v t)' = u' v t + u v' t + u v t';$

$|x|' = \frac{|x|}{x} x'$

$|f(x)|' = \frac{|f(x)|}{f(x)} f'(x)$

Derivabilitatea functiilor

a) Multimea punctelor de deriv ale fc sunt -- acele puncte unde -- exista si $f_s'(x_0) = f_d'(x_0)$;

ex : $f : \{-1\} \cup [0, 1]$ --- fc continua automat si in $x_0 = -1$

multimea punctelor de deriv ale fc sunt -- $x \in (0, 1)$

(in $x_0 = -1$ nu avem -- $f_s'(-1)$, nici $f_d'(-1)$

in $x_0 = 0$ nu avem -- $f_s'(0)$

in $x_0 = 1$ nu avem -- $f_d'(1)$

b) Multimea punctelor in care fc are derivata -
----sunt acele fc unde exista una din $f_s'(x_0)$ sau $f_d'(x_0)$ finita sau infinita

ex : $f : \{-1\} \cup [0, 1]$

$f(x) = \arcsin\left(x - \sqrt{1 - x^2}\right);$

$$f'(x) = \frac{x + \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{2 x \sqrt{1 - x^2}}}$$

$f_d'(0) = \lim (f'(x), x > 0) = +\infty$ --- deci exista $f_d'(0) = +\infty$ in $x_0 = 0$ -- deci fc are derivata

$f_s'(1) = \lim (f'(x), x < 1) = +\infty$ --- deci exista $f_s'(1) = +\infty$ in $x_0 = 1$ -- deci fc are derivata

Deci -- multimea punctelor de deriv ale fc sunt -- $x \in (0, 1)$

Deci -- multimea punctelor in care fc are derivata sunt -- $x \in [0, 1]$

Derivata integralei definite

$\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\, dt\right)' = b'(x) f(b(x)) - a'(x) f(b(x));$

Derivata fc compuse

$(fog)'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$

$(fofof)'(x) = f'(f(f(x))).f'(f(x)).f'(x)$

Derivata de ord 1 a fc inverse intr - un punct

$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ --- unde --- $y_0 = f(x_0)$; $x_0 = f^{-1}(y_0)$

ex : $f : R \to R$; $f(x) = x^3 + 2x + 5$; – continua si bijectiva

$\left(f^{-1}\right)'(8) = ?$

Rezolvare :

etapa1 ----

$f(x_0) = y_0$, $y_0 = 8$, $f(x_0) = 8$, $x_0 = ?$

$x_0^3 + 2x_0 + 5 = 8$; singura sol reala $x_0 = 1$; (deoarece functia este bijectiva)

etapa2 ----

$f'(x) = 3x^2 + 2$;

$f'(x_0) = f'(1) = 5$;

etapa3 ----

$\left(f^{-1}\right)'(8) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{5}$

Exemplu 1--------------------

$f : R \to R$

$f(x) = x + e^x$; $f'(x) = 1 + e^x$;

a) --- $f^{-1}(1) = ?$

$x + e^x = 1$ --- rezulta --- $x = 0$; Deci :

$f^{-1}(1) = 0$;

b) ----- $\left(f^{-1}\right)'\left(e^x\right) = ?$

$x + e^x = e^x$ --- rezulta --- $x = 0$; si -- $f'(0) = 2$;

$\left(f^{-1}\right)'\left(e^x\right) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$;

c) ------- $\lim \frac{\sin x}{f^{-1}\left(e^x\right)}$, $x \to 0 = \frac{0}{0} = l'H = \lim \frac{(\sin x)'}{\left(f^{-1}\right)'\left(e^x\right)}$, $x \to 0 = \frac{\cos 0}{\frac{1}{2}} = 2$;

Derivata de ord 2 a fc inverse intr – un punct

$\left(f^{-1}\right)''(y_0) = -\frac{f''(x_0)}{[f'(x_0)]^3}$ --- unde --- $y_0 = f(x_0)$

ex : --$f : R \to R$; -- $f(x) = x + e^x$;
$f'(x) = 1 + e^x$; $f''(x) = e^x$;

$\left(f^{-1}\right)''(1) = ?$

Rezolvare :

etapa 1 ----stim ca $y_0 = 1$ --- x_0 = ?

$f(x_0) = y_0$ --- $f(x_0) = 1$

$x_0 = f^{-1}(1) = ?$

$x_0 + e^{x_0} = 1$ --- $x_0 = 0;$

etapa 2----

deci -- $x_0 = f^{-1}(1) = 0;$

$$\left(f^{-1}\right)''(1) = -\frac{f''(0)}{[f'(0)]^3} = -\frac{e^0}{\left[1+e^0\right]^3} = -\frac{1}{8}$$

Punct de inflexiune al G_f in x_0

--- este sol ec $f''(x) = 0$ --- cu schimbare de semn al f''

Punct de intoarcere al G_f in x_0

$f_s'(x_0) = +\infty$

$f_d'(x_0) = -\infty$ ---- sau invers

Punct unghiular al G_f in x_0

$f_s'(x_0) \neq f_d'(x_0)$ --- si cel putin una finita

Derivata de ordinul n a unei functii

$$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$$

Ecuatia normalei la G_f intr – un punct

$$y - f(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Ecuatia tangentei la G_f care trece printr – un punct

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Exemplu : ------- Sa se calc aria marginita de axa OX curba y=ln(x) si
de tangenta la aceasta curba care trece prin origine O(0,0)

$f : (0, +\infty) \to R$

$f(x) = \ln x;$

$f'(x) = \frac{1}{x};$

---- ecuatia tangentei la curba $f(x)$ in x_0 este ---

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

---dar $f(x_0) = \ln x_0$

1) $y - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0)$ ---- ec unei drepte

---sa calculam $x_0 = ?$

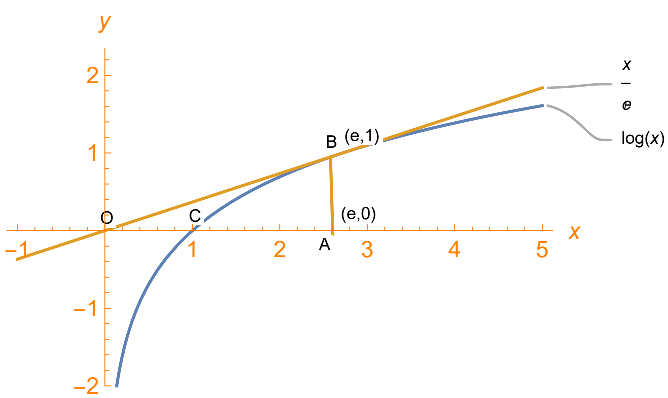
-- stim ca dreapta 1) trece prin O (0, 0)

$0 - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x - 0)$ ---- rezulta $x_0 = e$

--deci ec tangentei la curba--- $y = \ln x$ -- tangenta care trece si prin O (0, 0) va fi

$y = \frac{1}{e} x$

Calculul ariei ------------------------



$A_{OCB} = A_{OBA} - A_{CAB} = \int_0^e \frac{x}{e} \, dx - \int_1^e \ln x \, dx = \frac{e}{2} - 1;$

Derivata de ordinul n a unei functii

Exemplu 1-------------------

$f : \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \to R$

$f(x) = \ln(2x - 1) - x$

$f^{(n)}(x) = ?$

$f'(x) = \frac{2}{2x - 1} - 1;$

$f''(x) = \frac{-4}{(2x - 1)^2};$

...

$f^{(n)}(x) = ?$

$P(n) : f^{(n)}(x) = \frac{a_n}{(2x-1)^n}$; --- unde $a_2 = -4$;

$P(n+1) : f^{(n+1)}(x) = \left(\frac{a_n}{(2x-1)^n}\right)' = -a_n \frac{n(2x-1)^{n-1} 2}{(2x-1)^{2n}} = \frac{-2 n a_n}{(2x-1)^{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{(2x-1)^{n+1}}$;

$a_{n+1} = -2 n a_n$;

$a_2 = -4$; ---- pt $n \ge 2$;

$n = 2$; $a_3 = -2 * 2 a_2$

$n = 3$; $a_4 = -2 * 3 a_3$

$n = 4$; $a_5 = -2 * 4 a_4$

$n = 5$; $a_6 = -2 * 5 a_5$

...

$n = n-2$; $a_{n-1} = -2 * (n-2) a_{n-2}$

$n = n-1$; $a_n = -2 * (n-1) a_{n-1}$

inmultim :

$a_3 a_4 a_5 a_6 \ldots a_{n-1} a_n = (-2)^{n-2} (n-1)!\, a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \ldots a_{n-1}$

$a_n = (-2)^{n-2} (n-1)!\, a_2$; --- cu $a_2 = -4$;

$a_n = -(-2)^2 (-2)^{n-2} (n-1)! \quad = -(-2)^n (n-1)! \quad = (-1)^{n+1} 2^n (n-1)!$

$a_n = (-1)^{n+1} 2^n (n-1)!$;

$f^{(n)}(x) = \frac{a_n}{(2x-1)^n} = \frac{(-1)^{n+1} 2^n (n-1)!}{(2x-1)^n}$;

Exemplu 2--------------------

$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$;

Puncte de extrem

$P(a, b)$ – este punct de extrem a G_f daca :

a) $f'(a) = 0$;

b) $f(a) = b$;

c) In $x_0 = a$ --- $f'(x)$ isi schimba semnul

Cum aratam ca o fc este de 2 ori derivabila in x_0

a) f continua in x_0 --- $l_s(x_0) = l_d(x_0) = f(x_0)$ --- $x_0 \in D_{max}$

b) f derivabila in x_0 --- $f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$ --- unde

$$f'_s(x_0) = \lim_{x<x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}; \quad f'_d(x_0) = \lim_{x>x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0};$$

c) f deriv de 2 ori in x_0

$(f')'_s(x_0) = (f')'_d(x_0)$ --- **unde**

$$f''_s(x_0) = \lim_{x<x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}; \quad f''_d(x_0) = \lim_{x>x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0};$$

PRIMITIVE – INTEGRALE DEFINITE

O functie admite primitive pe D daca fc este continua pe D;

Integrabilitatea unei fc pe D

a) Orice functie derivabila este continua (recipraca falsa)

F ' (x) = f (x) deci primitiva -- F (x) --- obligatoriu este continua

b) Daca o fc admite primitive pe [a, b] --- rezulta **f este integrabila pe [a, b]**

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a);$$

Derivarea integralei definite

$$\left[\int_{a(t)}^{b(t)} f(x)\,dx\right]' = f(b(t))\,b'(t) - f(a(t))\,a'(t);$$

Generalitati

a) $f : D \to R,\ f(x) = ...$

$$F(x) = \int f(x)\,dx;$$

F (x) -- este o primitiva a fc f (x) daca :

--------F (x) --- derivabila pe D

--------F ' (x) = f (x);

b) f este primitiva lui g daca ---- **f ' = g;** **---f (x) = $\int g(x)\,dx$;**

1) O functie admite primitive pe [a, b] daca --- f (x) este continua pe [a, b]

2) O functie este integrabila pe [a, b] daca --- f (x) este marginita pe [a, b]

3) $F(x) = \int f(x)\,dx;$

4) $F'(x) = f(x);$

5) $\int a^{kx}\,dx = \frac{a^{kx}}{\ln a^k};$

Integrale din fc pare, impare

$$\int_{-a}^{a} f_{impara}(x)\,dx = 0 \text{ --- si } a > 0;$$

$$\int_{-a}^{a} f_{para}(x)\,dx = 2\int_0^a f_{para}(x)\,dx \text{ --- si } a > 0;$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0;$$

F (x) -- - este o primitiva a functiei f (x) daca :

-- F (x) - este derivabila pe D_{max} si

-- F ' (x) = f (x)

Proprietatile Integralei Definite

1) Teorema de medie pt fc integrabile (continue si marginite)

Fie f : [a, b] → R

-- fc integrabila pe [a, b] (adica functia este si marginita)

-- m (b - a) ≤ f (x) ≤ M (b - a) -- - oricare x ∈ [a, b]

$$m\,(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M\,(b-a)$$

2) Proprietate

Daca m ≤ f (x) ≤ M , si g (x) > 0, ---rezulta

$$m\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \le M\int_a^b g(x)\,dx$$

==

Calcul de limite folosind teorema de medie pt fc integrabile

Exemplu 1-------n ∈ N^*

$$L = \lim n^3 \int_n^{n+3} \frac{x^3}{x^6+1}\,dx = ?$$

f : [n, n + 3] → R

$$f(x) = \frac{x^3}{x^6+1} \quad \text{--- facem monotonia}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2\left(1-x^2\right)}{1+x^6} < 0 \quad \text{-- oricare } x \in [n, n+3],\ n \in N^* \text{ --- f este descresc}$$

n ≤ x ≤ n + 3, si f descresc -- rezulta

$$m = \frac{n^3}{n^6+1} = f(n) \ge f(x) \ge f(n+3) = \frac{(n+3)^3}{(n+3)^6+1} = M$$

Aplicam -- - limita spre + ∞

$$3 \leftarrow \frac{n^3}{n^6+1}\,(n+3-n) \le \int_n^{n+3} f(x)\,dx \le \frac{(n+3)^3}{(n+3)^6+1}\,(n+3-n) \to 3$$

Si din criteriul clestelui -- - rezulta

$$L = \lim n^3 \int_n^{n+3} \frac{x^3}{x^6+1}\,dx = 3;$$

Exemplu 2-------n ∈ N^*

$L = \lim \int_0^1 t^n e^n \, dt = ?$

$m \int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\, g(x)\,dx \le M \int_a^b g(x)\,dx$

pt --- $t \in [0, 1]$ -- $t^n \in [0, 1]$ --

Rezulta -- $e^n \in [1, e]$

Alegem -- $g(x) = t^n$

$f(x) = e^t$

$m = 1$

$M = e$

$$0 \leftarrow \frac{1}{n+1} = 1 \int_0^1 t^n \,dt \le \int_0^1 t^n e^n \,dt \le e \int_0^1 t^n \,dt = \frac{e}{n+1} \to 0$$

Rezulta din criteriul clestelui --- $L = \lim \int_0^1 t^n e^n \,dt = 0;$

Exemplu 3-------n ∈ N^*

$$L = \lim \int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x + 1}} = ?$$

$f : [n, n+1] \to R$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3 + x + 1}}$ --- facem monotonia

$f'(x) = -\frac{3x^2 + 1}{2\left(x^3 + x + 1\right)\sqrt{x^3 + x + 1}} < 0;$ --pt $x \in [n, n+1]$ --- $x > 0;$

f-- descresc

$n \le x \le n + 1$

$m = f(n+1) \le f(x) \le f(n) = M$

$m(b - a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b - a)$

$$m = \frac{1}{\sqrt{(n+1)^3 + (n+1) + 1}}; \; M = \frac{1}{\sqrt{n^3 + n + 1}};$$

$$0 \leftarrow \frac{1}{\sqrt{(n+1)^3 + (n+1) + 1}} (n + 1 - n) \le \int_n^{n+1} f(x)\,dx \le \frac{1}{\sqrt{n^3 + n + 1}} (n + 1 - n) \to 0$$

Rezulta din criteriul clestelui --

$$L = \lim \int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x + 1}} = 0;$$

Exemplu 4-------n ∈ N^*

$$L = \lim \frac{1}{n} \int_0^1 [n\,x]\,dx = ?$$

$nx - 1 \le nx \le nx$

$$\int_0^1 (n\,x - 1)\,dx \le \int_0^1 [n\,x]\,dx \le \int_0^1 n\,x\,dx \text{---impartim cu --n}$$

$$\frac{1}{n} \int_0^1 (n\,x - 1)\,dx \le \frac{1}{n} \int_0^1 [n\,x]\,dx \le \frac{1}{n} \int_0^1 n\,x\,dx$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \int_0^1 (n\,x - 1)\,dx \le \frac{1}{n} \int_0^1 [n\,x]\,dx \le \frac{1}{n} \int_0^1 n\,x\,dx = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \leftarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \le \frac{1}{n} \int_0^1 [n\,x]\,dx \le \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$$

Rezulta din criteriul clestelui --

$$L = \lim \frac{1}{n} \int_0^1 [n\,x]\,dx = \frac{1}{2}$$

Integrarea Functiilor Rationale.Met Coef Nedeterm

Exemplu 1------

$$\frac{4\,t}{(t+1)^2\,(t^2+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{(t+1)^2} + \frac{C\,t + D}{t^2+1}$$

$$4\,t = A\,(t+1)\,(t^2+1) + B\,(t^2+1) + (C\,t + D)\,(t+1)^2$$

Pt a afla coef A, B, C, D --dam valori convenabile lui ---t--- ca sa se anuleze din termeni

pt --t = -1 --- rezulta

$$4\,(-1) = 0 + B\,((-1)^2 + 1) \text{ --- } B = -2$$

pt --t = i --- rezulta

$$4\,i = 0 + 0 + (C\,i + D)\,(i+1)^2$$

$2 = C\,i + D$ ---- $C = 0;\ D = 2;$

Rezulta -----

$$4\,t = A\,(t+1)\,(t^2+1) - 2\,(t^2+1) + 2\,(t+1)^2$$

Pt a afla pe A ---dam o valoare conven. lui t (dif de -1, i)

$t = 0;$

$0 = A * 1 * 1 - 2 * 1 + 2 * 1$ --- rezulta $A = 0;$

Deci ----

A = 0; B = -2; C = 0; D = 2;

$$\frac{4t}{(t+1)^2(t^2+1)} = \frac{0}{t+1} + \frac{-2}{(t+1)^2} + \frac{0t+2}{t^2+1}$$

$$\frac{4t}{(t+1)^2(t^2+1)} = \frac{-2}{(t+1)^2} + \frac{2}{t^2+1}$$

Exemplu 2------

$$\frac{1}{x(x^3+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1}$$

$$1 = A(x+1)(x^2-x+1) + Bx(x^2-x+1) + (Cx+D)x(x+1)$$

Pt $x = -1$ -- obtinem -- $B = -\frac{1}{3}$;

Pt $x = 0$ -- obtinem -- $A = 1$;

Inlocuim ce am gasit ----

$$1 = A(x+1)(x^2-x+1) + Bx(x^2-x+1) + (Cx+D)x(x+1)$$

$$1 = 1(x+1)(x^2-x+1) + \left(-\frac{1}{3}\right)x(x^2-x+1) + (Cx+D)x(x+1)$$

Pt a afla pe C si D --- dam 2 valori conven. lui -- x; --rezulta 2 ec cu 2 nec

pt $x = 1$ --- $C + D = \frac{-1}{3}$

pt $x = 2$ --- $2C + D = -1$

---rezulta $C = \frac{-2}{3}$; $D = \frac{1}{3}$;

Deci ---- = $A = 1$; $B = \frac{-1}{3}$; $C = \frac{-2}{3}$; $D = \frac{1}{3}$;

$$\frac{1}{x(x^3+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1}$$

$$\frac{1}{x(x^3+1)} = \frac{1}{x} + \frac{\frac{-1}{3}}{x+1} + \frac{\frac{-2}{3}x+\frac{1}{3}}{x^2-x+1}$$

Etapele Integrarii functiilor rationale

a) Daca grad numarator > grad numitor facem impartirea polinoamelor -- $\frac{D}{I} = C + \frac{R}{I}$

b) Fractia $\frac{R}{I}$ se va descompune cu metoda coef nedeterminati

Calculul primitivelor de forma -- $\int \frac{\alpha}{a\ x^2+b\ x+c} dx,\ \int \frac{\alpha\ x+\beta}{a\ x^2+b\ x+c} dx$

---- numitorul are $\Delta<0$;

$$a)\ F(x) = \int \frac{\alpha}{a x^2 + b x + c} dx = \frac{\alpha}{a} \int \frac{\alpha}{x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a}} dx =$$

$$= \frac{\alpha}{a} \int \frac{\alpha}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{-\Delta}{4a}}\right)^2} dx = \text{arctg}\ () \ldots$$

---apoi facem substitutia ---- $x + \frac{b}{2a} = u$; -- $dx = du$; ----- $a = \sqrt{\frac{-\Delta}{4a}}$;

$$b)\ F(x) = \int \frac{\alpha x + \beta}{a x^2 + b x + c} dx = \frac{\alpha}{2a} \int \frac{2 a x + b - b}{a x^2 + b x + c} dx + \int \frac{\beta}{a x^2 + b x + c} dx =$$

$$= I_1(x) + I_2(x);$$

$$I_1(x) = \frac{\alpha}{2a} \int \frac{2 a x + b - b}{a x^2 + b x + c} dx = \frac{\alpha}{2a} \ln\left(a x^2 + b x + c\right) - \frac{b\alpha}{2a} \int \frac{1}{a x^2 + b x + c} dx =$$

$$= \frac{\alpha}{2a} \ln\left(a x^2 + b x + c\right) - \text{arctg}\ () \ldots$$

$$I_2(x) = \int \frac{\beta}{a x^2 + b x + c} dx = \beta \int \frac{1}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{-\Delta}{4a}}\right)^2} dx = \text{arctg}\ () \ldots.$$

Integrarea functiilor rationale de forma n --- $I_n = \int_a^b \frac{1}{\left(a x^2 + b x + c\right)^n} dx$

--- se porneste de la I_1 -- si se face prin parti

Exemplu 1 --------------------

$$I = \int_0^1 \frac{2}{\left(x^2 + 1\right)^2} dx = 2 \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = 2 I_1 = ?$$

I_1 -- se face prin parti

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = \text{arctg}\ x;$$

Dar --- prin parti rezulta -----

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 x' \frac{1}{x^2 + 1} dx = \frac{x}{x^2 + 1} - \int_0^1 x \frac{0 - 2x}{\left(x^2 + 1\right)^2} dx = \frac{x}{x^2 + 1} + 2 \int_0^1 \frac{x^2 + 1 - 1}{\left(x^2 + 1\right)^2} dx$$

$$I_1 = \frac{x}{x^2+1} + 2\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx - 2\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$I_1 = \frac{x}{x^2+1} + 2\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx - I;$$

$$I = \int_0^1 \frac{2}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{x}{x^2+1} + 2\,\text{arctg}(x) - I_1$$

$$I = \frac{x}{x^2+1} + 2\,\text{arctg}(x) - \text{arctg}(x)$$

$$I = \frac{x}{x^2+1} + \text{arctg}(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2};$$

Proprietate a integralei definita

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b+x)\,dx$$

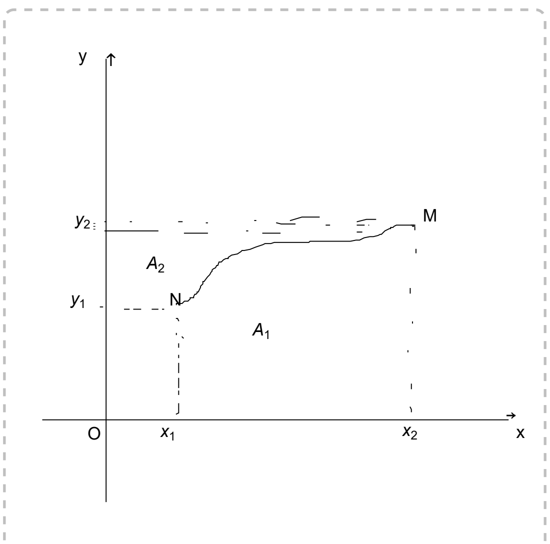
Integrarea Functiei Inverse

Metoda Grafica

$$A_1 = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

$$A_2 = \int_{y_1}^{y_2} f^{-1}(x)\,dx$$

--Gf-- graficul fc f (x)



$$A_2 = \int_{y_1}^{y_2} f^{-1}(x)\,dx = A_{\text{dreptunghi mare}} - A_{\text{dreptunghi mic}} = x_2\,y_2 - x_1\,y_1 - A_1$$

$$\int_{y_1}^{y_2} f^{-1}(x)\,dx = x_2\,y_2 - x_1\,y_1 - A_1 = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

Metoda Schimbarii de Variabila

$f : A \to B$ -- cunoastem -- $f(x)$ --- bijectiva (strict monotona), derivabila si continua pe A

$$\int_{y_1}^{y_2} f^{-1}(y)\,dy = ?$$

OBS ---

Pornim de la -- $x = f^{-1}(y)$ si $y = f(x)$ deci -- $\begin{cases} x \to \text{prin } f \to y \\ y \to \text{prin } f^{-1} \to x \end{cases}$

$$I = \int_{y_1}^{y_2} f^{-1}(y)\,dy = ?$$

--- facem schimb de var --- $y = f(x)$

$y = f(x)$ --- rezulta $\begin{cases} y_1 = f(x_1) \text{ ---- } x_1 = f^{-1}(y_1) \\ y_2 = f(x_2) \text{ ---- } x_2 = f^{-1}(y_2) \end{cases}$ --- si - rezulta -- $f^{-1}(y) = x$

$dy = f'(x)\,dx$

Inlocuind -- $dy = f'(x)\,dx$ -- si -- $f^{-1}(y) = x$ ----- integrala devine -----

$$\int_{y_1}^{y_2} f^{-1}(y)\,dy \dashrightarrow I = \int_{y_1}^{y_2} f^{-1}(y)\,dy = \int_{f(x_1)}^{f(x_2)} x\,f'(x)\,dx$$

$$I = \int_{f(x_1)}^{f(x_2)} x\,f'(x)\,dx$$

Integrala fc inverse va fi ---- (se va calcula mai intai limitele de integrare)

$$\int_{y_1}^{y_2} f^{-1}(x)\,dx = \int_{f^{-1}(y_1)}^{f^{-1}(y_2)} x\,f'(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} x\,f'(x)\,dx$$

OBS : O alta formula utila :

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)\,dx = b\,f(b) - a\,f(a)$$

Exemplu ------

$f : R \to R$ --- este bij, deriv, si continua

$$f(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$\int_0^{\frac{11}{6}} f^{-1}(x)\,dx = ?$ --- rezulta $y_1 = 0$; si $y_2 = \frac{11}{6}$;

--etapa 1 -----

--calculul limitelor de integrare --- $x_1 = ?,\ x_2 = ?$

$f(x_1) = y_1 = 0;\ ---x_1 + \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_1^3}{3} = 0;\ ---\ x_1 = 0;$ --(singura sol reala-- deoarace f - bij)

$f(x_2) = y_2 = \frac{11}{6};\ ---x_2 + \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_2^3}{3} = \frac{11}{6};\ ---\ x_2 = 1;$ --(singura sol reala-- deoarace f - bij)

--etapa 2 -----aplicam formula

$$\int_{y_1}^{y_2} f^{-1}(x)\, dx = \int_{x_1}^{x_2} x\, f'(x)\, dx$$

$$\int_0^{\frac{11}{6}} f^{-1}(x)\, dx = \int_0^1 x \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)' dx = \int_0^1 x\left(1 + x + x^2\right) dx = \frac{13}{12};$$

Calculul ariei supraf plane dintre 2 curbe --f(x), g(x)

Etape ----

1) se reprezinta G_f, si G_g

2)se face tabelul de monotonie pt --------- f(x) si g(x)

3) se calc pct de int a G_f si G_f---f(x) = g(x)

3)se fac cele 2 tabele de monotonie

4) se calc aria, vcolumul etc

Formule de integrare complexe

--- a,b >= 1; x > =0;

1) $\int \frac{x^{b-1} - x^{a-1}}{(x^a + 1)(x^b + 1)} dx = \int \left(\frac{x^{b-1}}{x^b + 1} - \frac{x^{a-1}}{x^a + 1}\right) dx$

2) $\int_{\frac{1}{b}}^{b} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^a + 1)} dx = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{b}}^{b} \frac{1}{x^2 + 1} dx$ --- $a \in R,\ b > 0;$

3) $I(x) = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx - \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^2} dx$

$$I(x) = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx - \frac{1}{a^2} \int x \left[\frac{-1}{2(x^2 + a^2)}\right]' dx$$

Integrarea prin parti – Repetitie

$\int P_n(t)\, e^{at}\, dt = Q_n(t)\, e^{at}$ ---- si apoi derivam

Exemplu -------- $P_n(t) = t^2;\ a = -1;\ \ Q_n(t) = \left(a t^2 + b t + c\right)$

$\int t^2 e^{-t}\, dt = \left(a t^2 + b t + c\right) e^{-t}$ | derivam

$$t^2 e^{-t} = (2 a t + b) e^{-t} - \left(a t^2 + b t + c\right) e^{-t} \ \Big| : e^{-t}$$

$$t^2 = 2 a t + b - a t^2 - b t - c \text{ --- rezulta}$$

$$\begin{cases} a & = -1 \\ 2 a - b & = 0 \\ b - c & = 0 \end{cases} \text{ ---- } a = -1;\ b = -2;\ c = -2;$$

$$\int t^2 e^{-t}\, dt = \left(a t^2 + b t + c\right) e^{-t} + C = \left(-t^2 - 2 t - 2\right) e^{-t} + C;$$

Functie Integrabila Riemann

$$\lim_{x\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n} k\right) = \int_a^b f(x)\, dx;$$

MONOTONIA FUNCTIEI

Cum aratam ca o fc este;

- Este monotona (cresc, descresc)
- Este > , < decat o expresie
- Are puncte de extrem, puncte critice, de max de min
- Calculul Imaginii fc f (multimea valorilor functiei pe tot intervalul de def), sau f((a,b))
- Valoarea minima, maxima a functie
- Functie inj, surj, bijectiva

Etape:

-Se calc f'(x)

-Se rezolva ec f'(x)=0 rezulta x1,x2

-Se face tabelul de monotonie a fc f(x) – se pun in tabel si punctele unde nu este definite functia (unde fc este discontinua)

x	-∞		x1		x2		∞
f'(x)		-----------	0	++++++++	0	----------------------	
f(x)	f(-∞)	descresc	f(x1)	cresc	f(x2)	descresc	f(∞)

-Semnul fc derivatei intai se stabileste dand valori intre intervale x€(-∞ ,x1) etc..

-Se calculeaza limitele la capetele domeniului si in x1, x2

Din tabel rezulta direct cerintele!!!!!

CONVEXITATEA SI CONCAVITATEA FUNCTIEI

Cum aratam ca o fc este:

- Este convexa, concava
- Are puncte de inflexiune

Etape:

-Se calc f''(x)

-Se rezolva ec f''(x)=0 rezulta x1,x2

-Se face tabelul de convexitate-concavitate a fc f(x)

– se pun in tabel si punctele unde nu este definite functia (unde fc este discontinua)

x	-∞		x1		x2		∞
f''(x)		-----------	0	++++++++	0	----------------------	
f(x)	f(-∞)	concava	f(x1)	convexa	f(x2)	concava	f(∞)

-Semnul fc derivatei a doua se stabileste dand valori intre intervale x€(-∞ ,x1) etc..

-Se calculeaza limitele la capetele domeniului si in x1, x2

Din tabel rezulta direct cerintele!!!!!

Şiruri de numere reale

Şirul (a_n) este mărginit dacă mulţimea termenilor lui este mărginită.

$\exists\, a, b \in \mathbb{R}, a < b$, a.î. $a_n \in [a,b], \forall n \in \mathbb{N}$

Ex. $(a_n)_{n\geq1}$, $a_n=\frac{2n-1}{n} \Rightarrow a_n \in [1,2]$

Dacă

$$\begin{cases} a_{n+1}-a_n > 0 \text{ se spune că şirul } (a_n) \text{ este strict crescător.} \\ a_{n+1}-a_n < 0 \text{ se spune că şirul } (a_n) \text{ este strict descrescător.} \end{cases}$$

Sau dacă

$$\begin{cases} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \text{ se spune că şirul } (a_n) \text{ este strict crescător.} \\ \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \text{ se spune că şirul } (a_n) \text{ este strict descrescător.} \end{cases}$$

Ex. $(a_n)_{n\geq1}$, $a_n=\frac{2n-1}{n}$. *Studiaţi monotonia şirului.*

$$a_{n+1}-a_n = \frac{2(n+1)-1}{n+1}-\frac{2n-1}{n} = \frac{2n+1}{n+1}-\frac{2n-1}{n} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$$

$\Rightarrow (a_n)_{n\geq1}$ *este strict crescător*

Un şir care are limita finită se numeşte şir convergent.
Un şir care nu este convergent este divergent.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \Rightarrow (a_n)_{n\geq1}, a_n = \frac{1}{n}$ *este convergent*

$\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty \Rightarrow (a_n)_{n\geq1}, a_n = n$ *este divergent*

$\nexists \lim\limits_{n\to\infty}(-2)^n \Rightarrow (a_n)_{n\geq1}, a_n = (-2)^n$ *este divergent*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = \begin{cases}\infty, k>0\\ 1, k=0 \\ 0, k<0\end{cases}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_k n^k+\cdots+a_1 n+a_0) = \lim\limits_{n\to\infty} a_k n^k = \begin{cases}\infty, & a_k>0\\ -\infty, & a_k<0\end{cases}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_k n^k+\cdots+a_1 n+a_0}{b_l n^l+\cdots+b_1 n+b_0} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_k n^k}{b_l n^l} = \begin{cases}\frac{a_k}{b_l}\cdot\infty, k>l\\ \frac{a_k}{b_l}, k=l \\ 0, k<l\end{cases}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases}\infty, a>1\\ 1, a=1\\ 0, |a|<1\\ \nexists, a\leq -1\end{cases}$

5) $\lim\limits_{n\to\infty} n^k a^n = 0, k\in \mathbb{N}^*, a\in(-1,1) \leftrightarrow |a|<1$

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^k} = \infty, k\in\mathbb{N}, a>1$

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = 0$

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, $\quad$ *$e = 2{,}71\ldots$ numărul lui Euler*

EXERCITII

1. $\lim\limits_{n\to\infty} n^3 = \infty$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}} = 0$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5n+1}-n\right) = \infty-\infty =$
$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+5n+1-n^2}{\sqrt{n^2+5n+1}+n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n}{2n} = \frac{5}{2}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+5n^2+1}-n\right) = \infty-\infty =$
$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+5n^2+1-n^3}{\sqrt[3]{(n^3+5n^2+1)^2}+n\sqrt[3]{n^3+5n^2+1}+n^2} =$
$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^2}{3n^2} = \frac{5}{3}$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 1^\infty = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{n}{n+1}-1\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^n =$
$= \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-1}}\right]^{\frac{-1}{n+1}n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n}{n+1}} = e^{-1}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n) = \lim\limits_{n\to\infty} 3^n = \infty, \quad 3>1$

Limite remarcabile

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin x_n}{x_n} = 1, x_n\in\mathbb{R}^*, x_n\to 0$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{tg x_n}{x_n} = 1, x_n\in\mathbb{R}^*, x_n\to 0$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\arcsin x_n}{x_n} = 1, x_n\in\mathbb{R}^*, x_n\to 0$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{arctg x_n}{x_n} = 1, x_n\in\mathbb{R}^*, x_n\to 0$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1+x_n)}{x_n} = 1, x_n\in\mathbb{R}^*, x_n\to 0, 1+x_n>0$

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^{x_n}-1}{x_n} = \ln a, x_n\in\mathbb{R}^*, x_n\to 0, a>0, a\neq 1$

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+x_n)^r-1}{x_n} = r, x_n\in\mathbb{R}^*, x_n\to 0, r\in\mathbb{R}$

EXERCITII

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right) =$
utilizăm $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right) = c,$
$c = 0{,}57\ldots$ *constanta lui Euler*
$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n+\ln n\right) = \lim\limits_{n\to\infty}(c+\ln n) = \infty$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{n} = \frac{\infty}{\infty} = Stolz-Cesaro = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} =$
$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}{n+1-n} =$
$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n}{n!}$
utilizăm Criteriul raportului
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{5^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{5^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n}{n!} = 0$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+n+1}$
utilizăm Criteriul radicalului
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+(n+1)+1}{n^2+n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+n+1} = 1$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n} = 0$
utilizând Criteriul de convergenţă
$a_n = \sin n \in [-1,1]$ *şi* $b_n = \frac{1}{n} \to 0$

LIMITE DE FUNCTII

FUNCŢII – LIMTE UZUALE. LIMITE REMARCABILE

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{x}=-\infty$	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}=+\infty$
$\lim\limits_{x\to\infty}x^a=\begin{cases}\infty,\text{daca } a>0\\0,\text{daca } a<0\end{cases}$			
$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}=\infty$	$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{x}=\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x}=-\infty$	
$\lim\limits_{x\to\infty}a^x=\begin{cases}\infty,\ \text{daca } a>1\\0,\ \text{daca } a\in(0,1)\end{cases}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=\begin{cases}0,\ \text{daca } a>1\\\infty,\ \text{daca } a\in(0,1)\end{cases}$		
$\lim\limits_{x\to\infty}\log_a x=\begin{cases}\infty,\ \text{daca } a>1\\-\infty,\ \text{daca } a\in(0,1)\end{cases}$	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\log_a x=\begin{cases}-\infty,\ \text{daca } a>1\\\infty,\ \text{daca } a\in(0,1)\end{cases}$		
$\lim\limits_{x\to\infty}\text{arctg}\,x=\frac{\pi}{2}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\text{arctg}\,x=-\frac{\pi}{2}$		
$\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\x<\frac{\pi}{2}}}\text{tg}\,x=+\infty$	$\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\x>\frac{\pi}{2}}}\text{tg}\,x=-\infty$		
$\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)=f(\alpha)$ unde $f:\mathbf{D}\to\mathbf{R}$ funcţie elementară si $\alpha\in\mathbf{D}$ punct de acumulare			
funcţiile trigonometrice nu au limită în punctele $\infty,-\infty$			
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$	$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$	
$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\text{tg}\,x}{x}=1$		
$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\text{arctg}\,x}{x}=1$		
$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^k}{a^x}=0,\ k\in\mathbf{N},\ a>1$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a^x}{x^k}=\infty,\ k\in\mathbf{N},\ a>1$		
$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\ ,\ a>0$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^r-1}{x}=r,\ r\in\mathbf{R}$	

OPERAȚII CU LIMITE (ȘIRURI ȘI FUNCȚII)

REGULI DE CALCUL CU LIMITE FINITE

Şiruri	Funcţii
daca $\lim a_n = a$ si $\lim b_n = b$ unde $a,b \in \mathbf{R}$, atunci:	daca $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=l_1$, $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=l_2$, l_1 , $l_2 \in \mathbf{R}$ atunci **:**
$\lim(a_n \pm b_n)=\lim a_n \pm \lim b_n = a \pm b$	$\lim\limits_{x\to\alpha}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\pm \lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=l_1 \pm l_2$
$\lim(\alpha \cdot a_n)=\alpha \cdot \lim a_n = \alpha \cdot a$	$\lim\limits_{x\to\alpha} a\cdot f(x)=a\cdot \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=a\cdot l_1$
$\lim(a_n \cdot b_n)=\lim a_n \cdot \lim b_n = a \cdot b$	$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\cdot g(x)=\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=l_1\cdot l_2$
$\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{\lim a_n}{\lim b_n}=\frac{a}{b}$ unde $b\neq 0$	$\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)}{\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)}=\frac{l_1}{l_2}$ unde $l_2\neq 0$
$\lim\left(a_n^{b_n}\right)=(\lim a_n)^{\lim b_n}=a^b$ unde $(a,b)\neq(0,0)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)^{g(x)}=\left[\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)}=l_1^{l_2}$ unde $(l_1,l_2)\neq(0,0)$

REGULI DE CALCUL CU LIMITE INFINITE, EXPRIMATE FORMAL

Adunare	$\infty+\infty=\infty$ $-\infty-\infty=-\infty$	$\infty+a=\infty$, $a\in\mathbf{R}$ $-\infty+a=-\infty$, $a\in\mathbf{R}$			cazuri de nedeterminare: $\infty-\infty$ **;** $-\infty+\infty$
Inmultire	$\infty\cdot\infty=\infty$ $\infty\cdot(-\infty)=-\infty$ $(-\infty)\cdot(-\infty)=\infty$	$\infty\cdot a=\begin{cases}\infty, a>0\\ -\infty, a<0\end{cases}$ $a\in\mathbf{R}^*$	$(-\infty)\cdot a=\begin{cases}-\infty, a>0\\ \infty, a<0\end{cases}$ $a\in\mathbf{R}^*$		cazuri de nedeterminare: $\infty\cdot 0$ **;** $-\infty\cdot 0$
Impartire	$\frac{a}{\infty}=0$, $a\in\mathbf{R}$ $\frac{a}{-\infty}=0$, $a\in\mathbf{R}$	$\frac{\infty}{a}=\begin{cases}\infty, a>0\\ -\infty, a<0\end{cases}$ $a\in\mathbf{R}^*$	$\frac{-\infty}{a}=\begin{cases}-\infty, a>0\\ \infty, a<0\end{cases}$ $a\in\mathbf{R}^*$		cazuri de nedeterminare: $\frac{\infty}{\infty};\frac{\infty}{-\infty};\frac{-\infty}{\infty};\frac{-\infty}{-\infty};\frac{0}{0}$
Putere	$\infty^{\infty}=\infty$ $\infty^{-\infty}=0$	$\infty^{a}=\begin{cases}\infty, a>0\\ 0, a<0\end{cases}$ $a\in\mathbf{R}^*$	$a^{\infty}=\begin{cases}\infty, a>1\\ 0,\ 0<a<1\end{cases}$ $a\in(0,\infty)-\{1\}$ $0^{\infty}=0$	$a^{-\infty}=\begin{cases}0,\ a>1\\ \infty,\ 0<a<1\end{cases}$ $a\in(0,\infty)-\{1\}$	cazuri de nedeterminare: $1^{\infty};1^{-\infty}$ **;** ∞^0 **;** 0^0
Cazul $\frac{1}{0}$	$\frac{1}{0_-}=-\infty$		$\frac{1}{0_+}=\infty$		
Limita functiei compuse	$\lim\limits_{x\to\alpha} f(g(x))=\lim\limits_{y\to\beta} f(y)$ unde $\beta=\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$				

Proprietăţi ale legii de compoziție

$x * y = xy - ax - ay + a^2 + a$

Proprietatea \ Legea	$x * y = xy - ax - ay + a^2 + a$	$x * y = xy - 6x - 6y + 42$
Restrângerea legii de compoziție	$x * y = (x-a)(y-a) + a$	$x * y = (x-6)(y-6) + 6$
$(G,*)$ este grup abelian/comutativ din proprietățile 1, 2, 3, 4, 5	$G = (a, \infty)$	$G = (6, \infty)$
1. Parte stabilă	$\forall x, y \in (a,\infty) \Rightarrow x * y \in (a, \infty)$	$\forall x, y \in (6,\infty) \Rightarrow x * y \in (6, \infty)$
2. Asociativitate $x * y * z = (x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in G$	$(x-a)(y-a)(z-a) + a$	$(x-6)(y-6)(z-6) + 6$
3. Element neutru $\exists e \in G, \forall x \in G, x * e = e * x = x$	$e = 1 + a$	$e = 7 \in (6, \infty)$
4. Elemente simetrizabile $\forall x \in G, \exists x' \in G, x * x' = x' * x = e$	$x' = \frac{1}{x-a} + a$	$x' = \frac{1}{x-6} + 6 \in (6, \infty)$
5. Comutativitate	$x * y = y * x, \forall x, y \in G$	$x * y = y * x, \forall x, y \in (6, \infty)$
Element absorbant $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$x * a = a * x = a, \forall\, x \in \mathbb{R}$	$x * 6 = 6 * x = 6, \forall\, x \in \mathbb{R}$

Utilizări ale proprietăților:

$\forall x_i \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n}, n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$ $x_1 * x_2 * x_3 * \dots * x_n =$ din asociativitate	$(x_1 - a)(x_2 - a) \dots (x_n - a) + a$	$(x_1 - 6)(x_2 - 6) \dots (x_n - 6) + 6$
$\underbrace{x * x * x * \dots * x}_{de\ n\ ori} =$ din asociativitate, $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$	$(x-a)^n + a$	$(x-6)^n + 6$
elementul absorbant în compunere $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$	$x_1 * x_2 * \dots * a * \dots * x_n = a$	$x_1 * x_2 * \dots * 6 * \dots * x_n = 6$

Proprietăţi ale legii de compoziţie
$x * y = xy + ax + ay + a^2 - a$

Proprietatea \ Legea	$x * y = xy + ax + ay + a^2 - a$	$x * y = xy + 5x + 5y + 20$
Restrângerea legii de compoziție	$x * y = (x + a)(y + a) - a$	$x * y = (x + 5)(y + 5) - 5$
$(G,*)$ este grup abelian/comutativ din proprietățile 1, 2, 3, 4, 5	$G = (-a, \infty)$	$G = (-5, \infty)$
1. Parte stabilă	$\forall x, y \in (-a, \infty) \Rightarrow x * y \in (-a, \infty)$	$\forall x, y \in (-5, \infty) \Rightarrow x * y \in (-5, \infty)$
2. Asociativitate $x * y * z = (x * y) * z = x * (y * z)$, $\forall x, y, z \in G$	$(x + a)(y + a)(z + a) - a$	$(x + 5)(y + 5)(z + 5) - 5$
3. Element neutru $\exists e \in G, \forall x \in G, x * e = e * x = x$	$e = 1 - a$	$e = -4 \in (-5, \infty)$
4. Elemente simetrizabile $\forall x \in G, \exists x' \in G, x * x' = x' * x = e$	$x' = \frac{1}{x + a} - a$	$x' = \frac{1}{x + 5} - 5 \in (-5, \infty)$
5. Comutativitate	$x * y = y * x$, $\forall x, y \in G$	$x * y = y * x$, $\forall x, y \in (-5, \infty)$
Element absorbant $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$x * (-a) = (-a) * x = -a$, $\forall x \in \mathbb{R}$	$x * (-5) = (-5) * x = -5$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Utilizări ale proprietăților:

$\forall x_i \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n}, n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$ $x_1 * x_2 * x_3 * \ldots * x_n =$ din asociativitate	$(x_1 + a)(x_2 + a) \ldots (x_n + a) - a$	$(x_1 + 5)(x_2 + 5) \ldots (x_n + 5) - 5$
$\underbrace{x * x * x * \ldots * x}_{de\ n\ ori} =$ din asociativitate, $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$	$(x + a)^n - a$	$(x + 5)^n - 5$
elementul absorbant în compunere $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$	$x_1 * x_2 * \ldots * (-a) * \ldots * x_n = -a$	$x_1 * x_2 * \ldots * (-5) * \ldots * x_n = -5$

$A, K \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_n\}$	mulţimi nevide
$(A,+,\cdot)$ $\begin{cases} A \neq \emptyset \\ (A,+) \text{ grup comutativ} \\ (A,\cdot) \text{ monoid} \\ \cdot \text{ este distributivă fața de } + \end{cases}$	inel
$(A,+,\cdot)$ $\begin{cases} A \neq \emptyset \\ (A,+) \text{ grup comutativ} \\ (A,\cdot) \text{ monoid comutativ} \\ \cdot \text{ este distributivă fața de } + \end{cases}$	inel comutativ
$(U(A),\cdot)$	grupul elementelor inversabile din inelul A
$(K,+,\cdot)$ $\begin{cases} \lvert K \rvert \geq 2 \\ (K,+) \text{ grup comutativ} \\ (K^*,\cdot) \text{ grup} \\ \cdot \text{ este distributivă fața de } + \end{cases}$	corp
$(K,+,\cdot)$ $\begin{cases} \lvert K \rvert \geq 2 \\ (K,+) \text{ grup comutativ} \\ (K^*,\cdot) \text{ grup comutativ} \\ \cdot \text{ este distributivă fața de } + \end{cases}$	corp comutativ
$(A,+)$ PS, A, EN, ES	grup
$(A,+)$ PS, A, EN, ES, C	grup comutativ sau grup abelian
$(A,\cdot)$ PS, A, EN	monoid
$(A,\cdot)$ PS, A, EN, C	monoid comutativ
$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \forall x, y, z \in A$	distributivitate la stânga
$(y+z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x \quad \forall x, y, z \in A$	distributivitate la dreapta
$(A_1,+,\cdot), (A_2,*,\circ)$ două inele $f: A_1 \to A_2$ $\begin{cases} f(x+y) = f(x) * f(y), \forall x, y \in A_1 \\ f(xy) = f(x) \circ f(y), \forall x, y \in A_1 \end{cases}$	f se numeşte morfism de inele
$f: A_1 \to A_2$ $\begin{cases} f \text{ morfism de inele} \\ f \text{ funcție bijectivă} \end{cases}$	f se numeşte izomorfism de inele
$(A_1,+,\cdot) \simeq (A_2,*,\circ)$	inele izomorfe
$(K_1,+,\cdot), (K_2,*,\circ)$ două corpuri $f: K_1 \to K_2$ $\begin{cases} f(x+y) = f(x) * f(y), \forall x, y \in K_1 \\ f(xy) = f(x) \circ f(y), \forall x, y \in K_1 \end{cases}$	f se numeşte morfism de corpuri
$f: K_1 \to K_2$ $\begin{cases} f \text{ morfism de corpuri} \\ f \text{ funcție bijectivă} \end{cases}$	f se numeşte izomorfism de corpuri
$(K_1,+,\cdot) \simeq (K_2,*,\circ)$	corpuri izomorfe
$(\mathbb{Z}[i],+,\cdot) \quad \mathbb{Z}[i] = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{Z}, i^2 = -1\}$	inelul întregilor lui Gauss
$(\mathbb{Z}_n,+,\cdot) \ \ n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	inelul claselor de resturi modulo n
$(\mathbb{Z}_p,+,\cdot)$ p număr prim, $p \in \mathbb{N}$	corpul claselor de resturi modulo n
$(\mathbb{Q}(\sqrt{d}),+,\cdot)$ $d \in \mathbb{Z} - \{1\}$ întreg liber de pătrate	corp pătratic

Morfism şi izomorfism de grupuri

morfism — Fie $(G_1,*)$ și $(G_2,\circ)$ două grupuri.

Funcția $f: G_1 \to G_2$ cu proprietatea $f(x * y) = f(x) \circ f(y)$, $\forall x, y \in G_1$ se numește morfism de grupuri.

izomorfism — Funcția $f: G_1 \to G_2$ cu proprietățile $\begin{cases} f \text{ morfism de grupuri} \\ f \text{ funcție bijectivă} \end{cases}$ se numește izomorfism de grupuri.

$(G_1,*) \simeq (G_2,\circ)$ notație pentru grupuri izomorfe

EndG — Dacă $f: G \to G$ morfism atunci f se numește endomorfism al grupului G.

AutG — Dacă $f: G \to G$ izomorfism atunci f se numește automorfism al grupului G.

proprietate — f morfism de grupuri dacă $f: G_1 \to G_2$ $\begin{cases} f(e_1) = e_2 \\ f(x') = \left(f(x)\right)', x \in G_1 \\ f(x^n) = \left(f(x)\right)^n, x \in G_1, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Morfism şi izomorfism de inele

morfism — Fie $(A_1,+,\cdot)$ și $(A_2,*,\circ)$ două inele.

Funcția $f: A_1 \to A_2$ cu proprietățile $\begin{cases} f(x + y) = f(x) * f(y), \forall x, y \in A_1 \\ f(x \cdot y) = f(x) \circ f(y), \forall x, y \in A_1 \end{cases}$

se numește morfism de inele.

izomorfism — Dacă funcția $f: A_1 \to A_2$ verifică $\begin{cases} f \text{ morfism de inele} \\ f \text{ funcție bijectivă} \end{cases}$ atunci f se numește izomorfism de inele.

$(A_1,+,\cdot) \simeq (A_2,*,\circ)$ notație pentru inele izomorfe

Morfism şi izomorfism de corpuri

morfism — Fie $(K_1,+,\cdot)$ și $(K_2,*,\circ)$ două corpuri.

Funcția $f: K_1 \to K_2$ cu proprietățile $\begin{cases} f(x + y) = f(x) * f(y), \forall x, y \in K_1 \\ f(x \cdot y) = f(x) \circ f(y), \forall x, y \in K_1 \end{cases}$

se numește morfism de corpuri.

izomorfism — Dacă funcția $f: K_1 \to K_2$ verifică $\begin{cases} f \text{ morfism de corpuri} \\ f \text{ funcție bijectivă} \end{cases}$ atunci f se numește izomorfism de corpuri.

$(K_1,+,\cdot) \simeq (K_2,*,\circ)$ notație pentru corpuri izomorfe

Nr.	Derivate
1	$c' = 0$
2	$x' = 1$
3	$(x^n)' = nx^{n-1}$
4	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
6	$(e^x)' = e^x$
7	$(a^x)' = a^x \ln a$
8	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
9	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
10	$(\text{arctg}\, x)' = \frac{1}{x^2+1}$
11	$(\text{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{x^2+1}$
12	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14	$(\sin x)' = \cos x$
15	$(\cos x)' = -\sin x$
16	$(\text{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
17	$(\text{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
18	$\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$
19	$\left(\sqrt{x^2+a^2}\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$
20	$\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)' = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

Nr.	Integrale nedefinite
1	$\int dx = x + C$
2	$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$
3	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
4	$\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C$
5	$\int e^x dx = e^x + C$
6	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
7	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$
8	$\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$
9	$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \text{arctg}\, x + C$
10	$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \text{arctg} \frac{x}{a} + C$
11	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2-a^2}\right\rvert + C$
12	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + C$
13	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$
14	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$
15	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
16	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$
17	$\int \text{tg} x dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$
18	$\int \text{ctg} x dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$
19	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \text{tg}\, x + C$
20	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\text{ctg}\, x + C$
21	$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \sqrt{x^2-a^2} + C$
22	$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \sqrt{x^2+a^2} + C$
23	$\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = -\sqrt{a^2-x^2} + C$

Nr. crt.	Operaţii	Formule
1	$(f \pm g)' = f' \pm g'$	Derivarea funcţiilor compuse $(f(u))' = f'(u) \cdot u'$
2	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$	
3	$(cf)' = c \cdot f'$	
4	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$	Derivata fucţiei inverse $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \quad unde\ y = f(x)$
5	$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$	Formula Leibniz-Newton $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big\|_a^b = F(b) - F(a), F\ o\ primitiva\ f$
6	$\int \alpha \cdot f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$	Integrarea prin părţi $\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big\|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$
7	$\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$	Prima schimbare de variabilă $\int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt$

www.mateinfo.ro

Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Tabel cu derivatele şi integralele funcţiilor compuse

1.	$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$	1.	$\int u^n \cdot u' = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$
2.	$(u^2)' = 2 \cdot u \cdot u'$	2.	$\int u \cdot u' = \frac{u^2}{2} + C$
3.	$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$	3.	$\int \sqrt{u} \cdot u' = \frac{2}{3} u\sqrt{u} + C$
4.	$(e^u)' = e^u \cdot u'$	4.	$\int e^u \cdot u' = e^u + C$
5.	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$	5.	$\int a^u \cdot u' = \frac{a^u}{\ln a} + C$
6.	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$	6.	$\int \frac{1}{u} \cdot u' = \ln\lvert u\rvert + C$
7.	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	7.	$\int \cos u \cdot u' = \sin u + C$
8.	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$	8.	$\int \sin u \cdot u' = -\cos u + C$
9.	$(tg\, u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$	9.	$\int \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u' = tg\, u + C$
10.	$(ctg\, u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$	10.	$\int \frac{1}{\sin^2 u} \cdot u' = -ctg\, u + C$
11.	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$	11.	$\int \frac{u'}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$
12.	$(arctg\, u)' = \frac{1}{u^2+1} \cdot u'$	12.	$\int \frac{u'}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} \cdot arctg \frac{u}{a} + C$
13.	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$	13.	$\int \frac{u'}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2+a^2}\right) + C$
14.	$(arcctg\, u)' = -\frac{1}{u^2+1} \cdot u'$	14.	$\int \frac{u'}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2-a^2}\right\rvert + C$
15.	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$	15.	$\int \frac{u'}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left\lvert\frac{u-a}{u+a}\right\rvert + C$
16.	$(\sqrt[n]{u})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}} \cdot u'$	16.	$\int tg\, u \cdot u' = -\ln\lvert\cos u\rvert + C$
17.	$(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$	17.	$\int ctg\, u \cdot u' = \ln\lvert\sin u\rvert + C$

$u(x) \overset{notație}{\equiv} u$ şi $u'(x)dx \overset{notație}{\equiv} u'$

Chapter 2
Algebra

2.1 Factoring Formulas

Real numbers: a, b, c
Natural number: n

65. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

66. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

67. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

68. $a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a-b)(a+b)(a^2 + b^2)$

69. $a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$

70. $a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$

71. If n is odd, then
$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1})$.

72. If n is even, then
$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$,

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + ab^{n-2} - b^{n-1}).$$

2.2 Product Formulas

Real numbers: a, b, c
Whole numbers: n, k

73. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

74. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

75. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

76. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

77. $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

78. $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

79. Binomial Formula

$$(a+b)^n = {}^nC_0 a^n + {}^nC_1 a^{n-1}b + {}^nC_2 a^{n-2}b^2 + \ldots + {}^nC_{n-1} ab^{n-1} + {}^nC_n b^n,$$

where ${}^nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ are the binomial coefficients.

80. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

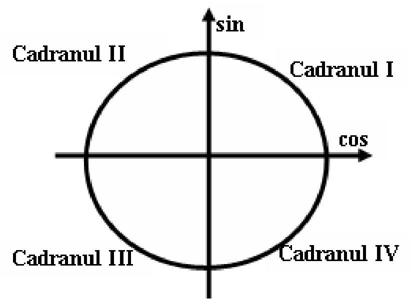
81.
$$(a+b+c+\ldots+u+v)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \ldots + u^2 + v^2 + \\ + 2(ab + ac + \ldots + au + av + bc + \ldots + bu + bv + \ldots + uv)$$

FORMULE TRIGONOMETRICE UZUALE

Tabelul trigonometric

	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	\
ctg	\	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
linie de construcție	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$

Cercul trigonometric



Semnele în cele 4 cadrane

$$x \in Cd.\text{I} \Rightarrow \begin{cases} \cos x > 0 \\ \sin x > 0 \end{cases}$$

$$x \in Cd.\text{II} \Rightarrow \begin{cases} \cos x < 0 \\ \sin x > 0 \end{cases}$$

$$x \in Cd.\text{III} \Rightarrow \begin{cases} \cos x < 0 \\ \sin x < 0 \end{cases}$$

$$x \in Cd.\text{IV} \Rightarrow \begin{cases} \cos x > 0 \\ \sin x < 0 \end{cases}$$

Paritate, imparitate:

$$\sin(-x) = -\sin x \qquad \cos(-x) = \cos x$$

$$tg(-x) = -tgx \qquad ctg(-x) = -ctgx$$

Periodicitate

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x, \forall k \in \mathbb{Z},$$

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x, \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$tg(x + k\pi) = tgx, \forall k \in \mathbb{Z},$$

$$ctg(x + k\pi) = ctgx, \forall k \in \mathbb{Z}$$

Formula trig fundamentală

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Formule trigon

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$$

$$tg(a+b) = \frac{tga + tgb}{1 - tga \cdot tgb}$$

$$tg(a-b) = \frac{tga - tgb}{1 + tga \cdot tgb}$$

$$ctg(a+b) = \frac{ctga \cdot ctgb - 1}{ctgb + ctga}$$

$$ctg(a-b) = \frac{ctga \cdot ctgb + 1}{ctgb - ctga}$$

Formule pentru dublul unui unghi

$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$tg 2x = \frac{2 \cdot tgx}{1 - tg^2 x}$$

$$ctg 2x = \frac{(ctgx)^2 - 1}{2ctgx}$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

Formule pentru jumătatea unui unghi

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Substituția universală

$$\sin a = \frac{2tg\frac{a}{2}}{1 + tg^2\frac{a}{2}}$$

$$\cos a = \frac{1 - tg^2\frac{a}{2}}{1 + tg^2\frac{a}{2}}$$

$$tga = \frac{2tg\frac{a}{2}}{1 - tg^2\frac{a}{2}}$$

Transformarea produselor în sume

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

$$\cos a \cdot \sin b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))$$

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

$$\sin a \cdot \sin b = -\frac{1}{2}(\cos(a+b) - \cos(a-b))$$

Transformarea sumelor în produs

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

$$tga + tgb = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}$$

$$tga - tgb = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b}$$

$$ctga + ctgb = \frac{\sin(a+b)}{\sin a \sin b}$$

$$ctga - ctgb = \frac{\sin(a-b)}{\sin a \sin b}$$

Aritmetică şi algebră

Mulțimi

$\in$ aparține $\notin$ nu aparține $\subset$ inclusă $\supset$ include

Φ-mulțimea **vidă** (nu are niciun element) $\forall$ - oricare, $\exists$ - există

–**Cardinalul** unei mulțimi=câte elemente are acea mulțime.

–Mulțimi **disjuncte** = care nu au elemente comune

N – naturale: 0, 1, 2, 3,... **N*** – naturale fără 0 (nenule): 1, 2, 3,...

Z – întregi: – 4, 0, 9, + 12

Q – raționale: $\frac{3}{5}$; – 4; 3; –6,2; 3,(4) **R** – reale: $\sqrt{7}$; $\frac{3}{5}$; – 4; 3; 3,(4)

Iraționale: (**R** – **Q**) $\sqrt{7}$; $-\sqrt{2}$; π.... $\boxed{\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}}$

Operații cu mulțimi $A = \{2; 4; 7\}, B = \{7; 9\}$

reuniunea $A \cup B = \{2; 4; 7; 9\}$ **intersecția** $A \cap B = \{7\}$

diferența $A - B = \{2; 4\}$ **produs cartezian** $A \times B = \{(2;7),(2;9),(4;7),(4;9),(7;7),(7;9)\}$

Numere naturale

– Numere **consecutive** = unul după altul Ex. 4;5

– Număr **par** (cu soț) 0,2,4,6,8,10,... ; are forma 2k

– Număr **impar** (fără soț) 1,3,5,7,9,11,... ; are forma 2k+1

$\overline{xy} = 10x + y$ $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$

– **Pătratul** lui 7 este $7^2 = 49$; **cubul** lui 2 este $2^3 = 8$

– **Pătrat perfect** – este egal cu pătratul unui număr natural : 0, 1, 4, 9, 16, 25,...

Un pătrat perfect nu poate avea ultima cifră 2, 3, 7 sau 8

– **Cub perfect** – este egal cu cubul unui număr natural : 0, 1, 8, 27,...

– **Teorema împărțirii cu rest** $\boxed{D = I \cdot C + R, \quad R < I}$ D-deîmpărțit, I-împărțitor C-cât, R-rest

– **Suma lui Gauss** $\boxed{1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}}$

-**Sume de puteri**

$S = 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{25} \quad \cdot 3 \Rightarrow 3S = 3^2 + 3^3 + ... + 3^{25} + 3^{26} \Rightarrow 3S = S - 3 + 3^{26} \Rightarrow S = \frac{3^{26} - 3}{2}$

Divizibilitate

$2 \mid 18$ (2 divide pe 18) $18 \vdots 3$ (18 este divizibil cu 3)

–**Divizorii** lui 18 sunt $D_{18}=\{1,2,3,6,9,18\}$

–**Multiplii** lui 18 sunt $M_{18}=\{0,18,36,54,...\}$

–număr **prim** -se divide doar cu 1 şi el însuşi: 2, 3, 5, 7, 11,...

–număr **compus** -care nu este prim: 4, 6, 8, 9, 10,....

–**Cel mai mare divizor comun** $(8;12) = 4$

Numere **prime între ele** – au c.m.m.d.c.=1 (ex.15 şi 8)

–**Cel mai mic multiplu comun** $[8;12] = 24$

–Dacă $a = 2^5 \cdot 3 \cdot 7^2$ şi $b = 2^6 \cdot 5 \cdot 7$, atunci a şi b au

c.m.m.d.c.$=2^5 \cdot 7$ şi **c.m.m.m.c.**$=2^6 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 5$

Relatia între c.m.m.d.c. si c.m.m.m.c. (a;b)•[a;b]=a•b

–**Câți divizori** naturali are un număr: dacă $n = 2^5 \cdot 3^9 \cdot 7^2$, atunci n are $(5+1)\cdot(9+1)\cdot(2+1) = 180$ divizori naturali

Criterii de divizibilitate

–cu **2**: dacă are ultima cifră 0,2,4,6 sau 8 (ex. 756;1934)

–cu **3**: dacă suma cifrelor se divide cu 3 (ex. 261;1005)

–cu **4**: dacă nr. format din ultimele 2 cifre se divide cu 4 (ex.912)

–cu **5**: dacă are ultima cifră 0 sau 5 (ex. 295;1330)

–cu **9**: dacă suma cifrelor se divide cu 9 (ex. 495; 8001)

–cu **10**: dacă are ultima cifră 0 (ex. 730;1900)

–cu **25**: dacă nr.format din ultimele 2 cifre se divide cu 25 (ex. 375)

Daca a si b sunt prime între ele, daca n⋮a si n⋮b, atunci n⋮(a•b)

Reguli de calcul

–**Fracții zecimale** $1,37 + 52,4 = 53,77$; $3 - 1,2 = 1,8$; $3,87 \cdot 10 = 38,7$ $0,02 \cdot 1000 = 20$; $2,3 \cdot 4,25 = 9,775$; $36,2:10 = 3,62$; $2,7:100 = 0,027$; $3,6:4 = 0,9$; $0,26:0,2 = 2,6:2 = 1,3$

–**Numere întregi** $5 - 8 = -3$; $-4 - 3 = -7$; $-7 + 2 = -5$; $-7 + 9 = 2$; $5 - (-2) = -5 + 2 = -3$

$3 \cdot (-5) = -15$; $(-4) \cdot (+2) = -8$; $(-2) \cdot (-3) = 6$; $8 : (-4) = -2$; $(-5) : (-1) = 5$;

Numere **pozitive**: +12; 3;.... Numere **negative**: –23; –2,...

Opusul lui 35 este – 35; opusul lui – 8 este 8.

–**Puteri** $2^7 \cdot 2^5 = 2^{12}$; $5^{10} : 5^3 = 5^7$; $(7^3)^4 = 7^{12}$; $(2n)^3 = 8n^3$; $(-3)^2 = 9$;

$(-3)^3 = -27$; $(-1)^7 = -1$; $(-1)^4 = 1$; $1^5 = 1$; $9^1 = 9$; $(-7)^1 = -7$; $3^0 = 1$; $(-6)^0 = 1$; $0^7 = 0$;

$5^{-2} = \frac{1}{5^2}$; $(-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = -\frac{1}{27}$

–**Fracții ordinare** $\frac{1}{6} + \frac{5}{4} = \frac{^{2)}1}{6} + \frac{^{3)}5}{4} = \frac{17}{12}$; $\frac{7}{6} \cdot \frac{5}{4} = \frac{35}{24}$; $\frac{7}{2} : \frac{5}{3} = \frac{7}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{21}{10}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5}$

Inversul lui 35 este $\frac{1}{35}$; inversul lui $\frac{3}{7}$ este $\frac{7}{3}$

Fracții **etajate** $\frac{\frac{3}{7}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{7} : \frac{4}{5} = \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{28}$

$\sqrt{19.00.96}$ = 436
16 | 83·3=249
=300 | 866·6=5196
249
=5196
5196
====

Radicali

$\sqrt{49} = 7$; $\sqrt{813} \cdot \sqrt{813} = 813$; $\sqrt{7} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{35}$; $\sqrt{374^2} = 374$

Scoaterea factorilor de sub radical $\sqrt{63} = \sqrt{9 \cdot 7} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{7} = 3\sqrt{7}$

Raționalizarea numitorului $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{^{\sqrt{2})}3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; $\frac{4}{3 - \sqrt{2}} = \frac{^{3+\sqrt{2})}4}{3 - \sqrt{2}} = \frac{12 + 4\sqrt{2}}{7}$

–**Calcul algebric** $5x + 2x = 7x$; $2y - 9y = -7y$; $-3n^2 - 5n^2 = -8n^2$; $a + a = 2a$;

$c \cdot c = c^2$; $-3n \cdot 2n^3 = -6n^4$; $3(2n - 7) = 6n - 21$; $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$;

$(x^2 - 3)(x - 4) = x^3 - 4x^2 - 3x + 12$ $+(-5 + x - y) = -5 + x - y$; $-(a - b + 3) = -a + b - 3$

Trecerea termenilor dintr-un membru in altul la egalitati: termenii se pot trece dintr-un membru in celalalt cu semn schimbat x–a+b=c–y+z => x+y–z=c+a–b

Factor comun

$3x + 3y = 3(x + y)$; $7a + 28 = 7(a + 4)$; $10n - 5 = 5(2n - 1)$;

$8 - 8k = 8(1 - k)$; $x^3 + x^2 = x^2(x + 1)$; $4y - 6y^5 = 2y(2 - 3y^4)$

Transformarea fracțiilor zecimale

-**Finite** $0,7 = \frac{7}{10}$; $0,207 = \frac{207}{1000}$; $3,45 = \frac{345}{100}$

-**Periodice simple** $0,(73) = \frac{73}{99}$; $2,(5) = 2\frac{5}{9} = \frac{23}{9}$

-**Periodice mixte** $0,13(5) = \frac{135 - 13}{900} = \frac{122}{900}$

Formule de calcul

Exemple

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ $\quad (3x-4)(3x+4) = 9x^2 - 16$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\quad (2y+3)^2 = 4y^2 + 12y + 9$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $\quad (3n-4)^2 = 9n^2 - 24n + 16$

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Formula radicalilor compuşi

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

Aproximări

Fie numărul 3,1476. Aproximat cu:

-o zecime prin lipsă=3,1; o zecime prin adaus=3,2

-o sutime prin lipsă=3,14; o sutime prin adaus=3,15

Partea întreagă a unui număr x este **[x]**, cel mai mare număr întreg $\le x$. Ex. $[3,7] = 3$; $[6] = 6$; $[0,25] = 0$; $[-3,1] = -4$

Partea fracționară a lui x este definită astfel: $\{x\} = x - [x]$.

Ex. $\{3,7\} = 0,7$; $\{4\} = 0$; $\{0,2\} = 0,2$; $\{-3,1\} = 0,9$

Fracții

$\frac{a}{b}$ a - **numărător**, b - **numitor**

- **subunitare**; au numitorul > numărătorul. Ex. $\frac{2}{9}$; $\frac{2013}{2014}$

- **supraunitare**; au numitorul < numărătorul. Ex. $\frac{7}{4}$; $\frac{19}{18}$

- **echiunitare**; au numitorul = numărătorul. Ex. $\frac{5}{5}$; $\frac{341}{341}$

- **ireductibile**, care nu se pot simplifica. Ex. $\frac{9}{14}$; $\frac{16}{25}$

- **reductibile**, care se pot simplifica. Ex. $\frac{15^{(3}}{18} = \frac{5}{6}$

- **echivalente** $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$; se recunosc astfel: $2 \cdot 12 = 3 \cdot 8$

Procente

Procente 7% din $300 = \frac{7}{100} \cdot 300 = 21$

Raport raportul numerelor 3 şi 5 este $\frac{3}{5}$

Proporție – o egalitate de două rapoarte (ex. $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$)

2, 3, 4, 6 se numesc **termenii** proporției

3 şi 4 sunt **mezii**; 2 şi 6 sunt **extremii**.

Proprietatea fundamentală a unei proporții:

produsul mezilor este egal cu produsul extremilor $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ => 3•4=2•6

Numerele x, y, z sunt **direct proporționale** cu 3, 5, 9 dacă $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{9}$

Numerele x, y, z sunt **invers proporționale** cu 2, 4, 7 dacă $\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{4}} = \frac{z}{\frac{1}{7}}$

Regula de trei simpla

a) Daca marimile sunt direct proportionale

Ex. 3 kg mere costa 12 lei. Cat vor costa 5 kg mere?

3 kg..............12 lei
5 kg..................x lei $\quad x = \frac{5 \cdot 12}{3} = 20$ lei

b) Daca marimile sunt invers proportionale

Ex. 3 robinete pot umple un bazin in 20 ore. Atunci 5 robinete, In cat timp pot umple bazinul?

3 rob................20 ore
5 rob..................x ore $\quad x = \frac{3 \cdot 20}{5} = 12$ ore

Probabilitatea unui eveniment $= \frac{\text{nr.cazuri favorabile}}{\text{nr.cazuri posibile}}$

Modul (valoare absolută)

$|6| = 6$; $|-3| = 3$. În general, $|x| = \begin{cases} x, \text{dacă } x \ge 0 \\ -x, \text{dacă } x < 0 \end{cases}$

Ex. $|3 - \sqrt{2}| = 3 - \sqrt{2}$, deoarece $3 - \sqrt{2} \ge 0$

$|1 - \sqrt{2}| = -(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$, deoarece $1 - \sqrt{2} < 0$

Comparări

$\frac{7}{5} > \frac{4}{5}$; $\frac{9}{2} > \frac{9}{7}$; $\frac{2}{9} < 1$

$-9 < -7$; $-5 < 2$; $-23 < 0$

$2,4 > 2,39$; $-4,1 < -3,82$

$\sqrt{3} > 1$; $-\sqrt{6} > -\sqrt{10}$

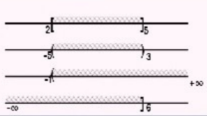
Intervale

{x∈R / 2≤x≤5}=[2;5] (interval închis)

{x∈R / -5<x<3}=(-5;3) (interval deschis)

{x∈R / x>-1}=(-1;+∞) (-1...plus infinit)

{x∈R / x≤6}=(-∞;6] (minus infinit...6)



Descompunerea expresiilor în factori

–**Prin factor comun**

$x^3 - 5x^2 = x^2(x - 5)$; $(n - 4)^5 + (n - 4)^4 = (n - 4)^4(n - 4 + 1)$

–**Prin formule**

$y^2 - 25 = (y - 5)(y + 5)$; $9x^2 - 6x + 1 = (3x - 1)^2$

–**Prin grupări de termeni**

$2n^3 + 2n^2 + 7n + 7 = 2n^2(n + 1) + 7(n + 1) = (n + 1)(2n^2 + 7)$

$x^2 + 6x + 8 = x^2 + 4x + 2x + 8 = x(x + 4) + 2(x + 4) = (x + 4)(x + 2)$

Sisteme de ecuații

-Rezolvare prin metoda **substituției**

$\begin{cases} x - y = 4 \\ 2x + y = 11 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4 + y \\ 2(4 + y) + y = 11 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4 + y \\ 8 + 3y = 11 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4 + y \\ 3y = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$

-Rezolvare prin metoda **reducerii**

$\begin{cases} a - b = 4 \quad | \cdot 2 \\ 3a + 2b = 22 \end{cases}$ $\begin{cases} 2a - 2b = 8 \\ 3a + 2b = 22 \end{cases}$ (se adună ecuațiile)

$5a \quad / \quad = 30 \quad \Rightarrow a = 6 \Rightarrow b = 4$

Medii

Aritmetică $m_a = \frac{x + y}{2}$; **Geometrică** $m_g = \sqrt{xy}$

Armonică $m_h = \frac{2xy}{x + y}$ **Inegalitatea mediilor** $m_h \le m_g \le m_a$

Media aritmetică ponderată a numerelor 10; 12; 9, având ponderile 3; 6; 5 este $m_{ap} = \frac{10 \cdot 3 + 12 \cdot 6 + 9 \cdot 5}{3 + 6 + 5}$

Ecuația de gradul doi

Forma generală $ax^2 + bx + c = 0$.

Rezolvare: calculăm Δ (**delta**), $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac.}$

Dacă $\Delta < 0$, ecuația nu are soluții.

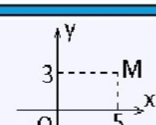
Dacă $\Delta > 0$, soluțiile sunt: $\boxed{x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}$

Sistem de axe

Ox- axa **absciselor**

Oy- axa **ordonatelor**

Punctul M(5;3)



5 şi 3 sunt **coordonatele** punctului M.

Numărul 5 este **abscisa**, iar 3 este **ordonata** lui M.

Funcții

Spunem că am definit o funcție pe mulțimea A cu valori în mulțimea B dacă facem ca **fiecărui** element din A să-i corespundă un **singur** element în B.

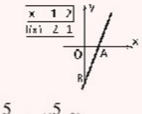
$f : A \to B$ (citim "funcția f definită pe A cu valori în B")

A - **domeniul de definiție**, B - **domeniul de valori**

Funcție liniară (**de gradul I**) este o funcție de forma $\boxed{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \ f(x) = ax + b.}$

Ex. $f(x) = 3x - 5$

– Reprezentare grafică. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x - 5$



Calcularea coordonatelor punctelor de intersecție a graficului cu axele:

-cu axa Oy se calculează $\boxed{f(0)}$; $f(0) = -5 \Rightarrow B(0; -5)$

-cu axa Ox se rezolvă ecuația $\boxed{f(x) = 0}$; $3x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3} \Rightarrow A(\frac{5}{3}; 0)$

Daca punctul P(u,v) se afla pe graficul functiei f, atunci f(u)=v.

Calcularea coordonatelor punctului de intersecție a graficelor a două funcții f şi g: se rezolvă ecuația $\boxed{f(x) = g(x)}$

Determinarea functiei de gradul I cunoscând doua puncte ale graficului:

Ex. Daca graficul trece prin punctele M(1;7) si N(2;9).

f(x)=ax+b => f(1)=7, f(2)=9. Se rezolva sistemul de ecuatii $\begin{cases} a+b=7 \\ 2a+b=9 \end{cases}$

a=2, b=5 => f(x)=2x+5

Unități de măsură

Lungime	Arie	Volum	Capacitate	Masă	Timp
3 m=30 dm	7 m²=700 dm²	5 m³=5000 dm³	1 l=1 dm³	4 kg=4000 g	1 oră=60 minute
0,7 m=70 cm	0,05m²=500 cm²	0,03 cm³=30 mm³	3 l=3000 ml	0,5 dag=5 g	1 minut=60 secunde
2 km=2000 m	2 km²=200 hm²	0,05 km³=50 hm³	0,3 dal=3 l	7 cg=70 mg	1 deceniu=10 ani
3,5 cm=35 mm	1 ar=1dam²=100 m²	1 dm³=1000 cm³	0,2 hl=20 l	2 hg=200 g	1 secol=100 ani
2,7 dam=0,27 hm	1 ha=1hm²=100 ari	1 m³=10⁹mm³	125 ml=0,125 l	6,23 g=62,3 dg	1 mileniu=1000 ani
1,3 mm=0,13 cm	0,02 ha =2 ari= 200 m²	3 mm³=0,003 cm³	0,07 kl=70 l	3 t=3000 kg	¼ ore=15minute
5,7 hm=570 m	0,04 m²=400 cm²	0,25 dam³=250 m³	3 cl=0,3 dl	34 dg=0,34 g	½ ore=30 minute

Geometrie

Unghiuri

- **congruente** : au măsuri egale
- **adiacente** : au acelaşi vârf şi o latură comună
- **opuse la vârf** : au acelaşi vârf şi laturile unuia sunt în prelungirea laturilor celuilalt

Două unghiuri opuse la vârf sunt congruente

- **complementare** : două unghiuri care au suma 90º
  Ex. complementul unghiului de 20º este unghiul de 70º
- **suplementare** : două unghiuri care au suma 180º
  Ex. suplementul unghiului de 20º este unghiul de 160º
- unghi **alungit** : care are 180º; unghi **nul** care are 0º
- unghi **propriu** : care nu este nici alungit, nici nul
- unghi **ascuţit** < 90º; **drept** = 90º ; **obtuz** > 90º
- unghiuri **în jurul unui punct**

Suma unghiurilor în jurul unui punct este 360º

- Unghiuri formate de două drepte cu o secantă
  - **alterne interne** : 1 şi 7; 2 şi 8
  - **alterne externe** : 3 şi 5; 4 şi 6
  - **corespondente** : 1 şi 5; 2 şi 6; 3 şi 7; 4 şi 8

Dacă dreptele sunt paralele, aceste perechi de unghiuri sunt congruente şi reciproc.

Teoreme importante

Cazurile de congruenta a triunghiurilor oarecare

L.U.L. U.L.U. L.L.L.

Cazurile de congruenta specifice triunghiurilor dreptunghice

C.U. (catetă-unghi) I.U. (ipotenuză-unghi) I.C. (ipotenuză-catetă)

- suma unghiurilor unui triunghi este 180º
- suma unghiurilor unui patrulater este 360º
- unghiurile de la baza unui triunghi isoscel sunt congruente
- într-un triunghi isoscel, bisectoarea unghiului de la vârf este şi mediană, înălţime, mediatoare.
- într-un triunghi dreptunghic, mediana din vârful unghiului drept este jumătate din ipotenuză. $AM = \frac{BC}{2}$
- într-un triunghi dreptunghic care are un unghi de 30º, cateta opusă acestui unghi este jumătate din ipotenuză. $AB = \frac{BC}{2}$
- teorema lui **Thales** : $EF \| BC \Leftrightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$
- teorema **fundamentală a asemănării** :

dacă $EF \| BC$, atunci $\Delta AEF \sim \Delta ABC$ (sunt asemenea), adică $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$

Cazurile de asemanare a triunghiurilor

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (adică sunt asemenea) dacă:

- cazul I $\angle A = \angle D$ şi $\angle B = \angle E$
- cazul II $\angle A = \angle D$ şi $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$
- cazul III $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$

raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare

- teorema **bisectoarei**: dacă AD este bisectoare, $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC}$

Într-un Δ dreptunghic:
- teorema **înălţimii**: $AD = \sqrt{BD \cdot DC}$
- teorema **catetei**: $AB = \sqrt{BD \cdot BC}$
- teorema lui **Pitagora**: $AB^2 + AC^2 = BC^2$
- **unghiul la centru** ∠AOB are măsura egală cu a arcului cuprins între laturi $\angle AOB = \widehat{AB}$
- **unghiul înscris** ∠AMB are măsura jumătate din a arcului cuprins între laturi $\angle AMB = \frac{\widehat{AB}}{2}$
- unghiul format de o tangentă cu o coardă este jumătate din arcul subântins de coardă
- raza este perpendiculară pe tangentă
- diametrul perpendicular pe o coardă înjumătăţeşte şi coarda şi arcul.

cercuri secante, cercuri tangente, cercuri tangente, cercuri concentrice

- puncte **conciclice**: care se afla pe un cerc

Trigonometrie

sinus= $\frac{\text{cat.op.}}{\text{ip}}$; cosinus= $\frac{\text{cat.al.}}{\text{ip}}$

tangenta= $\frac{\text{cat.op.}}{\text{cat.al.}}$; cotangenta= $\frac{\text{cat.al.}}{\text{cat.op.}}$

cos u=sin (90º–u)

$\sin^2 u + \cos^2 u = 1$ $\quad$ $\text{tg}\, u = \frac{\sin u}{\cos u}$

	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Puncte şi drepte

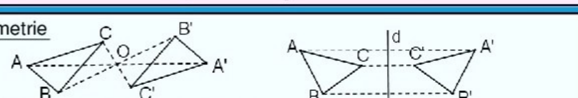
- puncte **coliniare**: sunt situate pe o dreaptă
- drepte **concurente**: drepte care se intersectează
  - **punct de concurenţă**: punctul în care se intersectează două drepte $a \cap b = \{P\}$
- **semidreapta deschisă**: (OA $O \notin$ (OA
- **semidreapta închisă**: [OA $O \in$ [OA — O - originea
- segmente **congruente**: au lungimi egale $[AB] \equiv [CD]$
- drepte **perpendiculare**: formează un unghi drept $a \perp b$
- drepte **paralele**: sunt în acelaşi plan şi nu se intersectează $a \| b$

Axioma lui Euclid: printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o singură paralelă la dreapta dată.

Linii importante în triunghi

- **Bisectoarea**: împarte un unghi în două unghiuri congruente. Bisectoarele sunt concurente în **I** - centrul cercului înscris (cercul inscris in triunghi)
- **Mediatoarea**: perpendiculară pe mijlocul unei laturi. Mediatoarele sunt concurente în **O** - centrul cercului circumscris. La triunghiul obtuzunghic, O este situat în exterior. La triunghiul dreptunghic, O este în mijlocul ipotenuzei. (cercul circumscris triunghiului)
- **Înălţimea**: perpendiculara dintr-un vârf pe latura opusă. Înălţimile sunt concurente în **H** - ortocentrul. La triunghiul obtuzunghic, H este în exterior.
- **Mediana**: uneşte un vârf cu mijlocul laturii opuse. Medianele sunt concurente în **G** - centrul de greutate. Centrul de greutate este la $\frac{1}{3}$ de bază şi $\frac{2}{3}$ de vârf: $GM = \frac{1}{3}AM$, $AG = \frac{2}{3}AM$

Simetrie



Triunghiul A'B'C' este simetricul triunghiului ABC faţă de punctul O. O - centru de simetrie

Triunghiul A'B'C' este simetricul triunghiului ABC faţă de dreapta d. d - axă de simetrie

Arii şi alte formule

Triunghi $A_\Delta = \frac{b \cdot h}{2}$; $A_\Delta = \frac{ab\sin C}{2}$; $A_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, unde p este semiperimetrul, $p = \frac{a+b+c}{2}$ **(formula lui Heron)**

Triunghi **echilateral**: înălţimea $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; aria $A_{\Delta ech.} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Triunghi **dreptunghic**: înălţimea $h = \frac{c_1 \cdot c_2}{ip}$; aria $A_{\Delta dr.} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2}$

Linia mijlocie în triunghi
- uneşte mijloacele a două laturi;
- Este paralelă cu a treia latură şi este jumătate din aceasta.

Raza cercului înscris în triunghi $r = \frac{A}{p}$ (A-aria, p-semiperimetrul)

Unghi exterior al unui triunghi

Paralelogram A=b•h **Dreptunghi** A=L•l **Romb** $A = \frac{D \cdot d}{2}$ **Pătrat** $A = l^2$, diag. $d = l\sqrt{2}$

Trapez $A = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$ sau $l_m \cdot h$

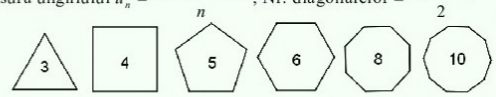
Linia mijlocie în trapez
- uneşte mijloacele laturilor neparalele;
- Este paralelă cu bazele şi este egală cu media lor aritmetică: $l_m = \frac{B+b}{2}$

Segmentul care uneste mijloacele diagonalelor unui trapez este egal cu $\frac{B-b}{2}$

Poligon regulat - are toate laturile congruente si unghiurile congruente

n - nr. laturi apotema $a_n = R\cos\frac{180°}{n}$; latura $l_n = 2R\sin\frac{180°}{n}$

Măsura unghiului $u_n = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$; Nr. diagonalelor $= \frac{n(n-3)}{2}$ OM-apotema



△ echilateral, pătrat, pentagon, hexagon, octogon, decagon

Cerc Lungimea (circumferinţa) $L = 2\pi R$, Aria $A = \pi R^2$, $\pi \approx 3{,}14159265...$

Figuri geometrice

Triunghi
- **isoscel**: are două laturi congruente
- **echilateral**: are toate laturile congruente
- **oarecare** : are laturi de lungimi diferite
- **ascuţitunghic** : toate unghiurile ascuţite
- **obtuzunghic**: are un unghi obtuz
- **dreptunghic**: are un unghi drept
  - **catete** : laturile care formează unghiul drept
  - **ipotenuza** : latura opusă unghiului drept

Patrulater convex, concav

- **Paralelogram** : are laturile opuse paralele

Proprietăţile paralelogramului:
- laturile opuse sunt congruente
- unghiurile opuse sunt congruente, iar unghiurile alăturate sunt suplementare
- diagonalele au acelaşi mijloc

Dreptunghiul : paralelogramul care are un unghi drept
- diagonalele dreptunghiului sunt congruente

Rombul : paralelogramul care are două laturi alăturate congruente
- diagonalele rombului sunt perpendiculare şi sunt bisectoare ale unghiurilor

Pătratul: are toate proprietăţile dreptunghiului şi rombului

- **Trapezul**: are două laturi paralele şi celelalte două neparalele

Trapez isoscel are laturile neparalele congruente

Trapez dreptunghic are un unghi drept

Geometrie in spatiu

- O dreapta este perpendiculara pe un plan daca este perpendiculara pe doua drepte concurente din acel plan
- Daca o dreapta este perpendiculara pe un plan, atunci ea este perpendiculara pe toate dreptele din acel plan.
- **teorema celor trei perpendiculare**: $AM \perp \alpha, MB \perp d \Rightarrow AB \perp d$

Unghiul dintre o dreapta si un plan este egal cu unghiul format de dreapta cu proiectia ei pe plan.

Aria proiectiei pe un plan a unei figuri cu aria A este egala cu A•cos u, unde u este unghiul format de planul figurii cu planul de proiectie.

Poliedre

Prisma $V = A_B \cdot h$

A_L = suma ariilor feţelor laterale

$A_L = P_B \cdot h$

Aria totală $A_T = A_L + 2A_B$

Diagonala paralelipipedului $d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Diagonala cubului $d = l\sqrt{3}$

Piramida $V = \frac{A_B \cdot h}{3}$

A_L = suma ariilor feţelor laterale

$A_L = \frac{P_B \cdot ap}{2}$

Aria totală $A_T = A_L + A_B$

apotemă=înălţimea unei feţe laterale

Volumul tetraedrului regulat $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Trunchiul de piramidă

$V = \frac{h}{3}(A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b})$

A_L =suma ariilor feţelor laterale

$A_L = \frac{(P_B + P_b)\cdot ap}{2}$

Aria totală $A_T = A_L + A_B + A_b$

Corpuri rotunde

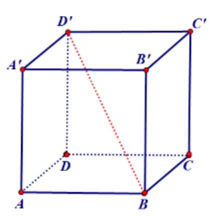
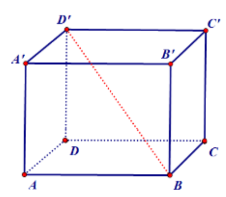
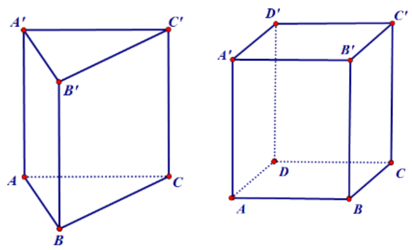
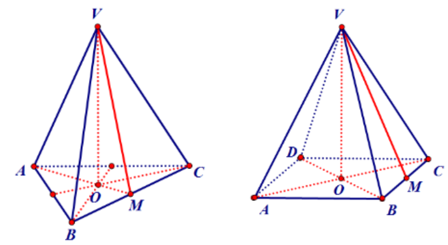
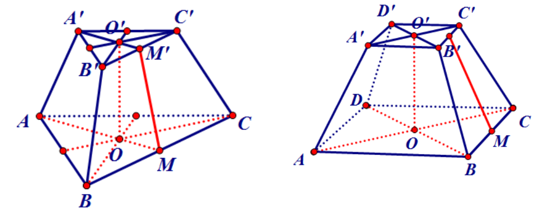
Cilindrul $A_L = 2\pi RG$, $A_T = A_L + 2A_B$, $V = \pi R^2 h$ (G=h)

Conul $A_L = \pi RG$, $A_T = A_L + A_B$, $V = \frac{\pi R^2 \cdot h}{3}$

unghiul sectorului desfăşurării $u = \frac{360° R}{G}$

Trunchi de con $A_L = \pi G(R+r)$, $A_T = A_L + A_B + A_b$, $V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$

Sfera $A = 4\pi R^2$, $V = \frac{4\pi R^3}{3}$

<table>
<tr><th>Cubul</th><th>Paralelipipedul deptunghic</th><th>Prisma
triunghiulară regulată
patrulateră regulată</th><th>Piramida
triunghiulară regulată
patrulateră regulată</th><th>Trunchiul de piramidă
triunghiulară regulată
patrulateră regulată</th></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>$A_l = 4l^2$
$A_t = 6l^2$
$V = l^3$
$d_{cub} = l\sqrt{3}$</td>
<td>$A_l = P_b \cdot h$
$A_t = 2(L \cdot l + L \cdot h + l \cdot h)$
$V = L \cdot l \cdot h$
$d_p = \sqrt{L^2 + l^2 + h^2}$</td>
<td>$A_l = P_b \cdot h$
$A_t = A_l + 2A_b$
$V = A_b \cdot h$</td>
<td>$A_l = \frac{P_b \cdot a_p}{2}$
$A_t = A_l + A_b$
$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$</td>
<td>$A_l = \frac{(P_B + P_b) \cdot a_t}{2}$
$A_t = A_l + A_B + A_b$
$V = \frac{h_t}{3}(A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b})$</td>
</tr>
</table>

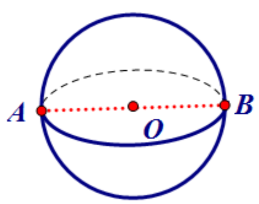
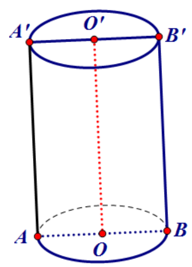
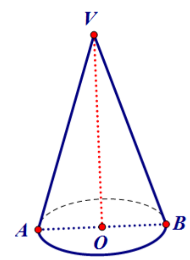
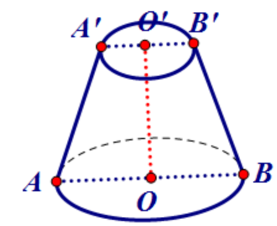
<table>
<tr><th>Sfera</th><th>Cilindrul</th><th>Conul</th><th>Trunchiul de con</th></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>$A = 4\pi R^2$
$V = \frac{4\pi R^3}{3}$</td>
<td>$A_l = 2\pi RG$
$A_t = 2\pi R(G + R)$
$V = \pi R^2 h$</td>
<td>$A_l = \pi RG$
$A_t = \pi R(G + R)$
$V = \frac{\pi R^2 h}{3}$</td>
<td>$A_l = \pi G_t(R + r)$
$A_t = A_l + A_B + A_b = \pi G_t(R + r) + \pi R^2 + \pi r^2$
$V = \frac{\pi h_t}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$</td>
</tr>
</table>

TABLA INMULTIRII DE LA 1 LA 10, MATEMATICA

Inmultirea cu 0	Inmultirea cu 1	Inmultirea cu 2	Inmultirea cu 3
0 x 1 = 0	1 x 1 = 1	1 x 2 = 2	1 x 3 = 3
0 x 2 = 0	2 x 1 = 2	2 x 2 = 4	2 x 3 = 6
0 x 3 = 0	3 x 1 = 3	3 x 2 = 6	3 x 3 = 9
0 x 4 = 0	4 x 1 = 4	4 x 2 = 8	4 x 3 = 12
0 x 5 = 0	5 x 1 = 5	5 x 2 =10	5 x 3 = 15
0 x 6 = 0	6 x 1 = 6	6 x 2 =12	6 x 3 = 18
0 x 7 = 0	7 x 1 = 7	7 x 2 =14	7 x 3 = 21
0 x 8 = 0	8 x 1 = 8	8 x 2 =16	8 x 3 = 24
0 x 9 = 0	9 x 1 = 9	9 x 2 =18	9 x 3 = 27
0 x10= 0	10x1=10	10x 2=20	10x3 =30

Inmultirea cu 4	Inmultirea cu 5	Inmultirea cu 6	Inmultirea cu 7
1 x 4 = 4	1 x 5 = 5	1 x 6 = 6	1 x 7 = 7
2 x 4 = 8	2 x 5 =10	2 x 6 =12	2 x 7 =14
3 x 4 =12	3 x 5 =15	3 x 6 =18	3 x 7 =21
4 x 4 =16	4 x 5 =20	4 x 6 =24	4 x 7 =28
5 x 4 =20	5 x 5 =25	5 x 6 =30	5 x 7 =35
6 x 4 =24	6 x 5 =30	6 x 6 =36	6 x 7 =42
7 x 4 =28	7 x 5 =35	7 x 6 =42	7 x 7 =49
8 x 4 =32	8 x 5 =40	8 x 6 =48	8 x 7 =56
9 x 4 =36	9 x 5 =45	9 x 6 =54	9 x 7 =63
1o x4=40	10 x5 =50	10 x6 =60	10 x7=70

Inmultirea cu 8	Inmultirea cu 9	Inmultirea cu 10
1 x 8 = 8	1 x 9 = 9	1 x 10 = 10
2 x 8 =16	2 x 9 =18	2 x 10 =20
3 x 8 =24	3 x 9 =27	3 x 10 =30
4 x 8 =32	4 x 9 =36	4 x 10 =40
5 x 8 =40	5 x 9 =45	5 x 10 = 50
6 x 8 =48	6 x 9 =54	6 x 10 = 60
7 x 8 =56	7 x 9 =63	7 x 10 = 70
8 x 8 =64	8 x 9 =72	8 x 10 = 80
9 x 8 =72	9 x 9 =81	9 x 10 = 90
10 x8=80	10 x9 =90	10 x10 =100